Enrico Valdinoci

Tori di transizione nella teoria KAM

Relatore Prof. Luigi Chierchia

Firma del Candidato

Firma del Relatore

Università degli Studi Roma Tre
febbraio 1998

Classificazione AMS: 58F05, 70H05.
Parole chiave: stabilità in sistemi hamiltoniani, teoria KAM, tori coi baffi.

Enrico Valdinoci è nato a Roma il 23 aprile 1974. Ha conseguito il diploma di maturità scientifica con 60/60 presso l'Istituto Pio IX – Aventino nel luglio 1993. Si è immatricolato nell'ottobre 1993 al Corso di Laurea in Matematica presso l'Università degli Studi Roma Tre, dove ha sostenuto i seguenti quindici esami, superandoli con il voto di 30/30 e lode:

Algebra, Geometria 1, Analisi 1, Fisica 1, Geometria 2, Analisi 2, Fisica 2, Meccanica razionale, Algebra Superiore, Istituzioni di Analisi Superiore, Analisi Superiore, Istituzioni di Geometria Superiore, Geometria Superiore, Sistemi Dinamici, Analisi Funzionale.

Ha presentato le seguenti due tesine di qualificazione:

- *Analisi di Fourier e dimostrazione del Teorema dei Numeri Primi*
- *Quasicristalli e potenziali di Schrödinger quasiperiodici.*

Dal maggio 1997 usufruisce di una borsa di studio del C.N.R. per laureandi.

Indice

Enrico Valdinoci

Tori di transizione nella teoria KAM

Relatore Prof. Luigi Chierchia

* * * * *

0.1 Prologo (motivazioni più o meno fisiche)

Venere gira al contrario.

L'asse di rotazione di un pianeta non è esattamente perpendicolare alla sua orbita, ma possiede un'inclinazione, o obliquità. L'alternarsi delle stagioni è l'effetto più evidente del valore non nullo dell'inclinazione dell'asse terrestre. Se consideriamo i pianeti del sistema solare noti fin dall'antichità, ovvero Mercurio, Venere, Terra, Marte, Giove e Saturno, si osserva che i corrispondenti valori di obliquità spaziano in un intervallo piuttosto ristretto: dal caso di Mercurio, che ha un'obliquità praticamente nulla, a quello di Saturno, il cui asse è inclinato di $26°$ rispetto alla perpendicolare al piano dell'orbita.

Ad eccezione di Venere, il cui asse è inclinato di quasi $180°$: Venere, quindi, ruota in senso inverso rispetto agli altri pianeti. Si può quindi congetturare[1] che, al momento della formazione del sistema solare, tutti i pianeti avessero essenzialmente la stessa obliquità, circa perpendicolare al piano orbitale, e che, in seguito, a causa di "piccole" perturbazioni dovute alla reciproca influenza tra pianeti e all'attrazione degli altri corpi celesti, l'asse di Venere abbia vagato in maniera disordinata, fino al ribaltamento completo della sua obliquità.

La teoria KAM[2] è un metodo matematico costruttivo e rigoroso per studiare la stabilità di questi sistemi.

Alcuni sistemi, detti integrabili, hanno una soluzione matematica definita: sono quindi completamente predicibili. Una perturbazione di questi sistemi può però essere non risolvibile esplicitamente, e il problema della stabilità può cosí diventare particolarmente spinoso – nel rigido mondo deterministico delle equazioni

[1]Le considerazioni fisiche qui esposte sono estremamente approssimative. Per maggiori informazioni cfr. il divulgativo [CTP] e le referenze ivi segnalate.

[2]Il nome è in onore dei tre matematici A.N. Kolmogorov, V.I. Arnol'd e J. Moser.

di Newton[3] compare l'impredicibilità[4]: le traiettorie diventano molto sensibili anche alle più piccole variazioni.

La teoria KAM nel caso sopra discusso prenderebbe in considerazione il sistema[5] Sole-Venere, che è integrabile, e esaminerebbe poi la perturbazione di questo sistema dovuta alla presenza di Giove. In effetti, al posto del "vero" Giove viene considerato un oggetto di massa molto più piccola: se la massa di questo "pseudo-Giove" è sufficientemente piccola, alcune strutture geometriche del sistema imperturbato si conservano, garantendo la stabilità del moto in una regione piuttosto grande. È tuttavia possibile che alcuni moti si svolgano in una regione instabile: pur essendo vicini a traiettorie stabili, col passare di strani eoni[6] l'asse si potrebbe lentamente allontanare dalla sua inclinazione originaria.

La costruzione delle regioni stabili avviene grazie a un processo iterativo in cui l'errore al passo successivo dell'algoritmo è quadratico rispetto a quello del passo precedente. La costruzione di traiettorie instabili fa uso dei tori coi baffi: si tratta di tori, invarianti per il moto, dotati di una varietà stabile e una varietà instabile; queste due varietà sono i baffi del toro. L'esistenza di una catena di tali tori che

[3]Se consideriamo l'energia (o hamiltoniana) di un sistema senza attrito $H(p,q)$, con p e q che variano in sottoinsiemi di $\mathbf{R}^N$, le equazioni del moto sono $\dot{p} = -\partial_q H$ e $\dot{q} = \partial_p H$, dove il punto indica la derivata rispetto al tempo.

[4]"L'altro passeggero era il dottor Ian Malcolm, anche lui uno scienziato, per l'esattezza un matematico.

–Questo parco non può funzionare, a causa della teoria del caos. A guardare bene il fondo delle cose, tutto è imprevedibile."

(M. Chrichton & S. Spielberg - *Jurassic Park*)

"–L'elementare teoria del caos dimostra che ad un certo istante tutti i robot di questo parco si ribelleranno contro di noi!

–E quando succederà?!?

–Tra 24 ore.

(un robot si alza da un lettino e strangola un tecnico di laboratorio)

–Oh. Ho dimenticato di riportare un 1 in un'addizione.

(Lo scienziato dei *Simpson* che ha costruito i robot-giocattolo del parco di Grattachecca & Fichetto)

[5]La teoria KAM si occupa dei sistemi senza attrito e si applica quindi a esempi più generali di quelli planetari. Con queste tecniche è possibile anche trattare problemi di stabilità relativi agli acceleratori di particelle (cfr. [M78]).

[6]"Notiamo che il comportamento delle soluzioni delle equazioni del moto su intervalli di tempo infiniti ha un rapporto solo indiretto con il problema del moto dei pianeti reali. Infatti, su un intervallo di tempo dell'ordine del miliardo di anni si risentono fortemente gli effetti non conservativi piccoli, trascurati nelle equazioni di Newton."

([ARN], pag. 409)

Per l'investigazione della stabilità per intervalli di tempo finiti si procede più facilmente con il Teorema della media di Birkhoff.

verificano alcune proprietà geometriche dimostra che il sistema non è stabile.

La linea di confine tra la stabilità e l'instabilità è segnata dalla razionalità o irrazionalità di alcune quantità fisiche. Ciò comporta una notevole imprevedibilità del sistema, in quanto, dal punto di vista fisico, a causa degli errori di misurazione, è impossibile distinguere un numero razionale da uno irrazionale.

0.2 Risultati principali

I tre risultati principali di questa tesi sono contenuti nel §8 e nel §9 della Parte II:

($\star$ **1**) Il Teorema 8.1 presenta un Teorema KAM sulla conservazione dei tori parzialmente iperbolici su una superficie ad energia fissata per l'hamiltoniana

$$H(I,\varphi,p,q) = h(I,pq;\mu) + \mu f(I,\varphi,p,q;\mu)$$

con I in un sottoinsieme di $\mathbf{R}^{N-1}$, $\varphi \in \mathbf{T}^{N-1}$, $p,q \in \mathbf{R}$, $|p|,|q| \le R$, dove μ è un parametro perturbativo piccolo. Ci riferiremo a p e a q chiamandole, a volte, "variabili iperboliche". Le I sono le "azioni", le φ gli "angoli".

Fissato $I_0 \in \mathbf{R}^{N-1}$, l'hamiltoniana

$$h(I,pq) \qquad\qquad (I,\varphi,p,q) \in \mathbf{R}^{N-1} \times \mathbf{T}^{N-1} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R},\ |p| \le R,\ |q| \le R$$

ammette il toro $\mathcal{T} \equiv \{(I_0,\varphi,0,0),\ \varphi \in \mathbf{T}^{N-1}\}$. come toro invariante.

Se poi $\mathcal{I}(s)$ è una curva qualsiasi, con $\mathcal{I}(0) = I_0$, $\mathcal{T}$ è contenuto nella superficie $\mathcal{S} \equiv \{(\mathcal{I}(pq),\varphi,p,q),\ \varphi \in \mathbf{T}^{N-1},\ |p| \le R,\ |q| \le R\}$, invariante per tempi brevi, su cui il moto è:

$$\Phi_h^t(\mathcal{I}(pq),\varphi,p,q) = \Big(\mathcal{I}(pq),\varphi + \omega t, pe^{-\lambda t}, qe^{\lambda t}\Big)$$

con ω e λ che dipendono solo dal prodotto delle variabili p e q. Il Teorema 8.1 mostra che la maggior parte di questi tori si conservano sotto piccole perturbazioni e che anche le superfici invarianti si conservano, a patto di scegliere una curva opportuna. Grossolanamente, il Teorema 8.1 asserisce che:

Se l'hamiltoniana $H(I,\varphi,p,q) = h(I,pq;\mu) + \mu f(I,\varphi,p,q;\mu)$ è reale analitica, con h sufficientemente generale, e $|\mu|$ è sufficientemente piccolo, allora esiste una trasformazione canonica C^∞ e $\mathrm{C}^\infty-$vicina all'identità, analitica nel parametro μ (oltre che negli angoli e nelle variabili iperboliche), tale che, su un opportuno insieme di Cantor, la nuova hamiltoniana dipenda solo dalle azioni e dal prodotto delle variabili iperboliche. Su tale insieme, le frequenze della nuova hamiltoniana sono vicine alle frequenze dell'hamiltoniana H. Si ottengono infine dei tori invarianti $(N-1)-$dimensionali con baffi $N-$dimensionali. Tali tori riempiono la maggior parte dello spazio a loro disposizione, con densità $1 - O(\sqrt{|\mu|})$.

Tale risultato è simile al Lemma 1 di [CG94] (e anche al Teorema 3.1 di [RW97], che però è a frequenza fissata anzichè ad energia fissata). La strategia dimostrativa usata è però in parte diversa da [CG94], e si ottengono inoltre alcune proprietà aggiuntive. Le differenze più rilevanti con [CG94] sono schematizzabili nei seguenti punti:

- Usiamo le Trasformazioni di Lie al posto delle funzioni generatrici, come in [RW97].
- Otteniamo una relazione tra la costante di diofantinità γ e la taglia della perturbazione μ del tipo di quella ottenuta da [N82] e [P82] per il Teorema KAM classico, mostrando che si può prendere $\gamma = O(\sqrt{|\mu|})$. Con questo, si fa una stima della misura dell'insieme dei tori conservati: i "buchi" su cui il Teorema non vale sono non più grandi di $O(\sqrt{|\mu|})$. Si osserva anche che questa stima sulla misura dei tori conservati è ottimale, come mostra l'esempio $H(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2, p, q; \mu) = I_1^2/2 + I_2 + pq + \mu(\cos\varphi_1 - 1)$.
- Seguendo un'idea di [C90], estendiamo in maniera liscia le funzioni definite su insiemi di Cantor utilizzando le elementari funzioni C^∞ a supporto compatto. Si prova che la composizione delle trasformazioni cosí ottenute converge in metrica C^∞ a una trasformazione canonica $C^\infty-$vicina all'identità.
- Si prova la dipendenza analitica dal parametro μ, dovuta a una convergenza uniforme.

($\star$ **2**) Nel Teorema 8.7 viene provato che i tori conservati col Teorema 8.1 esibiscono una proprietà di ostruzione secondo la definizione di [A64]: il flusso di fase di ogni intorno di un qualsiasi punto del baffo stabile interseca ogni varietà trasversa al baffo instabile. Questo è fatto nello spirito di [CG94]; ad essere precisi, però, in [CG94], pur provando l'esistenza di un'orbita instabile, si dimostra una proprietà di ostruzione apparentemente più debole di quella richiesta nella definizione di [A64], in quanto non viene dimostrata l'ostruzione per tutte le varietà trasverse, ma "solo" per quelle parametrizzate dagli angoli. Nel Lemma 8.6 proviamo però che se l'hamiltoniana è non singolare, tutte le varietà trasverse, a meno di spostarle un po' con il flusso di fase, *si possono parametrizzare con gli angoli.* Ciò permette di utilizzare il §8 di [CG94] per provare la transizione secondo la definizione di [A64].

($\star$ **3**) Nel §9 proviamo che tutti i sistemi hamiltoniani "quasi-integrabili" posseggono, nelle vicinanze delle risonanze semplici, la geometria descritta[7] nel §8. Più in dettaglio:

[7]Questo, almeno in teoria, costituisce una tecnica per costruire sistemi hamiltoniani

Denotiamo con $\pi : \mathbf{R}^{2N} \longrightarrow \mathbf{R}^{N-1}$ la proiezione sulle prime $N-1$ coordinate e fissiamo $\nu \in \mathbf{N}$, $\nu \geq 2$. Consideriamo il sistema $H(I,\varphi) = h(I) + \varepsilon f(I,\varphi;\varepsilon)$ con h e f sufficientemente generali. Sia $\bar{I}$ tale che $\partial_{I_N} h(\bar{I}) = 0$. Fissiamo ε_0 sufficientemente piccolo e $\gamma = O(\varepsilon_0^{\nu/2})$. Allora, $\forall \varepsilon$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, esiste una trasformazione canonica $(I,\varphi) = \Phi(A',\alpha',p',q')$ ed un insieme $\Omega_\gamma \subseteq \mathbf{R}^{N-1}$, con densità non minore di $1 - O(\varepsilon_0^{\nu/2})$, tali che per tutti gli (A',α',p',q') verificanti

$$\pi \circ \Phi(A',\alpha',p',q') \in \Omega_\gamma$$

si ha che $H \circ \Phi(A',\alpha',p',q')$ dipende solo da A' e dal prodotto di p' per q'.

Si ottengono cosí dei tori invarianti $(N-1)-$dimensionali con baffi $N-$dimensionali, con densità non minore di $1 - O(\varepsilon_0^{\nu/2})$ sul livello di energia.

La differenza tra il §8 e il §9 è che il modello considerato nel §8 ha due parametri, come, ad esempio

$$H(J,\psi,p,q) = h(J) + \frac{1}{2}p^2 + \varepsilon(\cos q - 1) + \mu f(J,\psi,p,q;\varepsilon;\mu)$$

dove (J,ψ) variano in un sottoinsieme di $\mathbf{R}^{N-1} \times \mathbf{R}$, $(\psi,q) \in \mathbf{T}^{N-1} \times \mathrm{S}^1$, μ è un parametro piccolo e ε è un parametro qualsiasi (non necessariamente piccolo): questi sistemi per $\mu = 0$ e $\varepsilon \neq 0$ possiedono separatrici e sono per questo chiamati in [CG94] *a priori instabili.* I risultati dimostrati nel §8 valgono per μ sufficientemente piccolo rispetto a ε. Nel §9 si applicano questi risultati ad hamiltoniane del tipo

$$H(I,\varphi) = h(I) + \varepsilon f(I,\varphi;\varepsilon)$$

con I in un sottoinsieme di $\mathbf{R}^N$ e $\varphi \in \mathbf{T}^N$. Questi sistemi, che sono completamente integrabili per $\varepsilon = 0$, vengono definiti in [CG94] *a priori stabili.* Il §9, quindi, si propone di esibire la struttura iperbolica dei sistemi a priori stabili nelle vicinanze delle risonanze semplici.

0.3 Schema della tesi

La tesi è divisa in due parti, più alcune appendici. La prima parte raccoglie i prerequisiti necessari, molti dei quali noti in letteratura; la seconda si occupa dei tori di transizione.

---

con "diffusione di Arnol'd". Nelle vicinanze delle risonanze semplici si formano catene di tori iperbolici; se si riuscisse a dimostrare che il baffo instabile di ogni toro di una catena sufficientemente lunga interseca trasversalmente il baffo stabile del toro successivo, si proverebbe la diffusione.

Parte I

§**1** Un sistema è detto completamente integrabile se ammette un'hamiltoniana del tipo $H(I,\varphi) = h(I)$, con $(I,\varphi) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{T}^N$, dipendente cioè dalle sole variabili di azione. Il moto è: $\Phi^t_H(I_0,\varphi_0) = (I_0, \varphi_0 + \omega_0 t)$, avendo denotato $\omega_0 \equiv h'(I_0)$. Se ω_0 è razionalmente indipendente l'orbita riempie densamente il toro $I_0 \times \mathbf{T}^N$. Nella Proposizione 1.5 si dimostra che se ω_0 è razionalmente dipendente la traiettoria si avvolge su un toro di dimensione più bassa: se ω_0 verifica r "relazioni indipendenti", il moto avviene su un toro di dimensione $N-r$; la Proposizione 1.6 chiarisce meglio la definizione di "relazione indipendente".

§**2** Nel Teorema 2.12, si prova che ogni trasformazione canonica ammette una funzione generatrice. Da questo risultato segue che il determinante di una matrice simplettica è uguale a uno. Ciò è dimostrato nel Corollario 2.14, senza utilizzare le forme differenziali, come fa invece [ARN], ma seguendo un'idea di [DAU] che era stata considerata erronea (cfr. [ARN], pag. 236). Mostro poi che *ogni trasformazione canonica vicina all'identità* $(P,Q) = \Phi(p,q;\varepsilon)$ *ammette una funzione generatrice del tipo* $\mathcal{G}(P,q;\varepsilon) = P \cdot q + \varepsilon\chi(P,q;\varepsilon)$, e si dà una condizione necessaria e sufficiente affinchè una trasformazione canonica vicina all'identità sia *un flusso hamiltoniano.*

Ci occupiamo poi delle Trasformazioni di Lie, cioè delle trasformazioni canoniche con struttura[8] di flusso hamiltoniano. Si fornisce uno sviluppo in serie di un'hamiltoniana qualsiasi su cui agisce una Trasformata di Lie, dando anche una stima del resto.

§**3** Un vettore $\omega \in \mathbf{R}^N$ si dice (γ,τ)-diofantino se $|\omega \cdot n| \geq \gamma/|n|^\tau$, $\forall n \in \mathbf{Z}^N - \{0\}$. Le Proposizioni 3.2 e 3.4 provano che per $\tau > N-1$ i vettori diofantini hanno misura piena, mentre per $\tau < N-1$ non ci sono vettori diofantini. L'Appendice C applicherà questi risultati per esibire un esempio di una serie di funzioni che converge su un insieme di misura piena, ma diverge su un insieme denso.

§**4** Si presenta il Teorema della media di Birkhoff: assumendo opportune condizioni di non risonanza, un'hamiltoniana quasi integrabile $H(I,\varphi) = h(I) + \varepsilon f(I,\varphi;\varepsilon)$ può essere trasformata in una "ancora più vicina" all'integrabilità, del tipo $\mathcal{H}(y,x) = h_k(y) + O(\varepsilon^{k+1})$. Questo permette di avere una stima migliore dei tempi di stabilità, in quanto, per hamiltoniane del tipo $\mathcal{H}(y,x) = h_k(y) + O(\varepsilon^{k+1})$ *le azioni sono vicine al loro valore iniziale per tempi di ordine* ε^{-k}.

[8]Tramite i risultati sopra esposti, si può dimostrare che le Trasformazioni di Lie sono *tutte e sole le trasformazioni canoniche vicine all'identità* $\Phi(p,q;\varepsilon)$ *verificanti una condizione di flusso. Esse ammettono una funzione generatrice del tipo* $\mathcal{G}(P,q;\varepsilon) = P \cdot q + \varepsilon\chi(P,q;\varepsilon)$.

La tentazione è ora quella di "mandare k all'infinito": formalmente otterremmo un'hamiltoniana completamente integrabile, in cui le azioni sono stabili per tempi infiniti. Tuttavia, tale procedimento è in genere divergente. Una delle cause di tale divergenza risiede nel fatto che nel procedimento compaiono dei denominatori che possono diventare molto piccoli[9] al crescere di k. Tale fenomeno è noto come problema dei *piccoli denominatori*.

Il Teorema 4.7 è un Teorema della media in presenza di risonanze, in cui le variabili angolari risonanti andranno pensate come variabili "lente".

§**5** Si dimostra che le hamiltoniane "tipo pendolo" possono essere trasformate, conservando la struttura canonica, nelle vicinanze dell'equilibrio iperbolico, in hamiltoniane *puramente iperboliche*, cioè che dipendono solo dal prodotto delle variabili. Inoltre la trasformazione conserva l'esponente di Liapunov. In questo modo, i rami della separatrice vengono "raddrizzati" in modo da coincidere, nelle vicinanze dell'origine, con gli assi coordinati. In [CG94] si dimostra questo risultato con un algoritmo KAM. In questa tesi si procede invece come in [M56], applicando il metodo dei maggioranti, per provare direttamente che, in questo caso, *le serie di Birkhoff convergono.*

§**6** Si considera l'hamiltoniana "quasi integrabile" $H(I,\varphi) = h(I) + \varepsilon f(I,\varphi;\varepsilon)$ con frequenza $\omega \equiv h'$ e si definiscono le condizioni di non degenerazione e non degenerazione isoenergetica. La Proposizione 6.2 mostra che la non degenerazione isoenergetica permette di mettere in relazione azioni e frequenze.

Nella Proposizione 6.3 otteniamo una semplice relazione tra la matrice di non degenerazione isoenergetica e la derivata seconda di una variabile di azione rispetto alle altre variabili di azione su un livello di energia non singolare[10].

[9] In effetti, non credo che i piccoli denominatori siano l'*unica* causa della suddetta divergenza: nell'Appendice E esibirò un modello senza piccoli denominatori le cui serie di Birkhoff divergono! inoltre, anche nei casi in cui non ci sono piccoli denominatori, la dimostrazione della (eventuale) convergenza delle serie di Birkhoff può essere non banale, come nel caso del successivo Teorema 5.1. Nell'Appendice E, inoltre, si fa una stima del resto del Teorema della media, dalla quale sembra che la divergenza delle serie di Birkhoff non sia legata esclusivamente ai piccoli denominatori.

[10] Precisamente, denotando con il suffisso "tilde" la proiezione sulle prime $N-1$ componenti, abbiamo dimostrato il risultato seguente:

Consideriamo l'hamiltoniana $h(I)$ con $I \in V \subseteq \mathbf{R}^N$ e sia $\omega(I) \equiv h'(I)$. Sia $N \geq 2$ e supponiamo $\omega_N \neq 0$. Sia $I_N(\tilde{I})$ tale che $h(\tilde{I}, I_N(\tilde{I})) = E$. Allora

$$\det \partial^2_{\tilde{I}} I_N = (-1)^N \, \omega_N^{-N-1} \det \begin{pmatrix} h'' & \omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$$

Parte II

§**7** Un toro $\mathcal{T}$ si dice *toro coi baffi* se $\mathcal{T}$ è una componente connessa dell'intersezione di due varietà W^s e W^u invarianti per il flusso di fase Φ^t e tali che $\forall x \in W^s$, $\operatorname{dist}(\Phi^t(x), \mathcal{T}) \xrightarrow{t \longrightarrow \infty} 0$ e $\forall x \in W^u$, $\operatorname{dist}(\Phi^t(x), \mathcal{T}) \xrightarrow{t \longrightarrow -\infty} 0$.

Un *toro di transizione* è un toro coi baffi $\mathcal{T}$ con la seguente proprietà: il flusso di fase di un qualsiasi intorno di un qualsiasi punto del baffo in arrivo W^s interseca ogni varietà trasversa al baffo in partenza W^u.

Assumiamo che il sistema abbia $\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_i, \ldots$ tori di transizione. Si dice che essi costituiscono una *catena di transizione* se il baffo in partenza di $\mathcal{T}_{i-1}$ interseca trasversalmente il baffo in arrivo di $\mathcal{T}_i$.

L'esistenza di una catena di transizione con tori "lontani" mostra l'esistenza di un orbita instabile.

Un esempio di toro di transizione è il toro coi baffi standard, discusso nell'Appendice F. Il Teorema 7.7 è un criterio di trasversalità per grafici contenuti in un livello di energia.

§**8** Il Teorema 8.1, enunciato per sommi capi a pagina 6, si occupa della conservazione, sotto piccole perturbazioni, dei tori parzialmente iperbolici. Se μ è la taglia della perturbazione, tali tori riempiono la maggior parte dello spazio a loro disposizione, con densità $1 - O(\sqrt{|\mu|})$.

Ci occupiamo quindi di tori coi baffi in coordinate "normali": cioè di tori $\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_n$ per l'hamiltoniana $H(J, \psi, y, x)$, $(J, \psi, y, x) \in \mathbf{R}^{N-1} \times \mathbf{T}^{N-1} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, su cui facciamo le seguenti assunzioni:

- Il baffo instabile di ogni toro interseca trasversalmente il baffo stabile del toro successivo.

- Esiste una trasformazione canonica

  $$\Phi : (I, \varphi, p, q) \longrightarrow (J, \psi, y, x)$$

  e n funzioni $\mathcal{I}_i : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^{N-1}$ $1 \le i \le n$ in modo che

  $$\Phi_H^t\left(\Phi\left(\mathcal{I}_i(pq), \varphi, p, q\right)\right) = \Phi\left(\mathcal{I}_i(pq), \varphi + \omega_i(pq)\, t, pe^{-\lambda_i(pq)\, t}, qe^{\lambda_i(pq)\, t}\right)$$

  $\forall |p|, |q| \le R$, con $\omega_i(0)$ diofantino.

- il baffo stabile dell' i-esimo toro si scrive come grafico trasverso negli angoli, nei pressi dell' $(i-1)$-esimo toro.

La Proposizione 8.5 afferma che quest'ultima ipotesi è generale; il Teorema 8.1 giustifica invece la seconda assunzione.

Il Teorema 8.7 prova che *i tori coi baffi in coordinate normali sono di transizione.*

§**9** Il sistema $H(I,\varphi) = h(I) + \varepsilon f(I,\varphi;\varepsilon)$ possiede generalmente una struttura iperbolica al primo ordine in ε su un sottoinsieme di densità grande di ogni livello di energia nelle vicinanze di una risonanza semplice. L'enunciato del Teorema 9.3 è riassunto a pagina 8.

Appendici

Appendice A. Evidenziamo un risultato di algebra lineare, utilizzato nella Proposizione 6.3.

Appendice B. Diamo una stima della dipendenza C^n−regolare del flusso di fase Φ^t dai dati iniziali, provando che $\forall n \in \mathbf{N}$ esistono due costanti c_n e G_n in modo che

$$\sum_{\substack{\alpha\in\mathbf{N}^N \\ |\alpha|\leq n}} \left| \frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha}\bigg|_{y=\xi} \Phi^t(y) - \frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha}\bigg|_{y=\eta} \Phi^t(y) \right| \leq c_n e^{G_n|t|} \left|\xi - \eta\right|$$

Appendice C. Usiamo i risultati del §3 per dare un esempio di una serie di funzioni che *converge su un insieme di misura piena, ma diverge su un insieme denso*: la serie

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}^2} (\cos n \cdot x)^{|n|^3} \qquad x \in \mathbf{R}^2$$

converge se x è $(\gamma, 2)$-diofantino, ma diverge se x è razionalmente dipendente.

Appendici D–E. Diamo due stime del resto nel Teorema della media di Birkhoff. La prima stima mostra una crescita del resto come una potenza di $1/\varepsilon_0$, ma ε_0 va a zero molto rapidamente al crescere di k. Nella seconda stima, invece, la piccolezza di ε_0 sarà dovuta solo ai piccoli denominatori, ma il resto crescerà fattorialmente[11].

[11] La seconda stima afferma che l'hamiltoniana $H(I,\varphi) = h(I) + \varepsilon f(I,\varphi)$, con f polinomio trigonometrico nelle φ di grado P e con frequenza non risonante fino all'ordine kP, viene trasformata mediante l'algoritmo descritto dal Teorema della media in

$$H(y,x) = h_k(y) + \varepsilon^{k+1} R_k(y,x;\varepsilon)$$

con

$$|R_k| \leq \frac{(cP)^{2(k+1)}\,(k+1)!}{\varepsilon_0^{k+1}}$$

con $\varepsilon_0 = O\left(\gamma^2\right)$, essendo c un'opportuna costante e γ la taglia dei piccoli denominatori.

Mentre la prima stima è sicuramente eccessiva, dando una divergenza del resto più che esponenziale a causa della piccolezza di ε_0, la seconda stima è, in un certo senso, "sharp": possiamo costruire un *modello senza piccoli denominatori le cui serie di Birkhoff divergono.*[12]

Appendice F. Ci si occupa del toro standard, provando che è di transizione e stimando il tempo di diffusione per catene di tori standard a frequenze diofantine. Si prova, inoltre, più in generale, che i tori $\mathcal{T}_{I_0} \equiv \{(I, \varphi, p, q) \in \mathbf{R}^{N-1} \times \mathbf{T}^{N-1} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R},\ I = I_0, ; p = q = 0\}$ sono di transizione per hamiltoniane del tipo $h(I, pq)$.

Appendice G. Vengono raccolti alcuni lemmi (e alcune loro generalizzazioni) usati negli algoritmi KAM.

Vorrei salutare e ringraziare tutti i miei compagni di studio. In particolare Daniele che mi ha insegnato i rudimenti del $\TeX$, e Luca per n^n buone ragioni, l'ultima delle quali è avermi segnalato alcune inesattezze che avevo scritto. Colgo l'occasione per dire che la probabilità che le cose scritte qui siano giuste è un $O(\varepsilon)$, per cui ringrazio in anticipo chi mi segnalerà errori e imprecisioni.

Dedico questa tesi a Ielma.

[12]Consideriamo la perturbazione di un oscillatore armonico unidimensionale: $H(I, \varphi) = \omega I + 2\varepsilon(1-I)\cos\varphi$, con $(I, \varphi) \in \mathbf{R} \times \mathrm{S}^1$. Un ragionevole modello senza piccoli denominatori consiste nella seguente equazione funzionale:

$$u + \varepsilon f(\partial_\varphi u, \varphi) = 0$$

Se consideriamo la serie di Birkhoff della funzione incognita $u = \sum \varepsilon^j u_j$, si dimostra che tale serie è divergente, e che la divergenza è fattoriale, come ottenuto nella seconda stima: $|u_j| \sim (j-1)!$.

Parte I
Prerequisiti

1 Moti lineari su tori

L'hamiltoniana $H(I,\varphi) = h(I) + \varepsilon f(I,\varphi;\varepsilon)$, in cui $I \in \mathbf{R}^N$ e $\varphi \in \mathbf{T}^N$ e H, h, f sono analitiche[1] in φ, in I (nelle vicinanze di $I = I_0$) e in ε (nelle vicinanze di $\varepsilon = 0$)[2], è "vicina all'integrabilità", nel senso che per $\varepsilon = 0$ il sistema è completamente integrabile e i suoi moti sono:

$$I(t) = I_0 \qquad\qquad \varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t$$

essendo $\omega_0 \equiv h'(I_0)$.

Definizione 1.1 *Un vettore $v \in \mathbf{R}^N$ si dice* **razionalmente indipendente** *se $\forall\, n \in \mathbf{Z}^N$, $n \neq 0$, si ha $v \cdot n \neq 0$.*

Se ω_0 è razionalmente indipendente, l'orbita riempie densamente[3] il toro N-dimensionale $\{I_0\} \times \mathbf{T}^N$.

Le orbite sono chiuse e il moto è periodico[4] di periodo T se e solo se $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T} n$ per qualche $n \in \mathbf{Z}^N$.

I seguenti risultati ci diranno che se ω_0 è razionalmente dipendente la traiettoria si avvolge su un toro di dimensione minore di N:

Lemma 1.2 *$\forall w \in \mathbf{Z}^2$, $\exists A \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbf{Z})$ con $\det A = 1$, tale che $(Aw)_2 = 0$.*

DIM.[5] Sia $d \equiv \mathrm{MCD}(w_1, w_2)$. Per l'Identità di Bezout[6] $\exists \alpha, \beta \in \mathbf{Z}$ tali che $\alpha w_1 + \beta w_2 = d$. Sia allora

$$A \equiv \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -w_2/d & w_1/d \end{pmatrix} \qquad \square$$

[1] La richiesta di analiticità è piuttosto forte: ci sono funzioni $C^\infty(\mathbf{R})$ che non sono analitiche in nessun punto, come ad es. $\sum_{n>0} \cos(n!\,x) \cdot (n!)^{-n}$, cfr. [FJ] pag. 69.

[2] Utilizzerò spesso un'analiticità in campo complesso, cioè richiederò la sviluppabilità in serie di potenze per $I \in \mathbf{C}^N$, con $|I - I_0| \leq \rho_0$ e $\varphi \in \mathbf{T}^N_\xi \equiv \{\psi \in \mathbf{C}^N$ tc $\Re\psi \in \mathbf{T}^N$ e $|\Im\psi| \leq \xi\}$.

Supporrò sempre, per semplicità, $\rho_0, \xi < 1$.

[3] Cfr. [GAL] pag. 239.

[4] "Proprio come era stato per infiniti cicli prima di allora e come sarebbe stato per l'eternità."

(H.P. Lovecraft)

[5] "Qualsiasi cosa i matematici possano asserire, una cosa come la dimostrazione non esiste, almeno in questo mondo."

(E.A. Poe - *Eureka*)

[6] Cfr. [FON] pag. 34.

Lemma 1.3 *$\forall v \in \mathbf{Z}^l$, $\exists B \in \mathrm{Mat}(l \times l, \mathbf{Z})$ con $\det B = 1$, tale che $(Bv)_j = 0$, $\forall 2 \leq j \leq l$.*

DIM. Dal Lemma precedente ho che $\exists A \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbf{Z})$ tale che $\det A = 1$ e

$$A \begin{pmatrix} v_{l-1} \\ v_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \star \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per cui[7] se

$$B_1 \equiv \begin{pmatrix} I_{l-2} & \\ & A \end{pmatrix}$$

si ha

$$B_1 v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{l-2} \\ \star \\ 0 \end{pmatrix}$$

e $\det B_1 = 1$. Supponiamo ricorsivamente di avere $B_k \in \mathrm{Mat}(l \times l, \mathbf{Z})$ con $\det B_k = 1$ e

$$B_k v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{l-k-1} \\ \star \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{con } 1 \leq k \leq l-2$$

Dal Lemma precedente $\exists \tilde{A} \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbf{Z})$ con $\det \tilde{A} = 1$, tale che

$$\tilde{A} \begin{pmatrix} v_{l-k-1} \\ \star \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \star \\ 0 \end{pmatrix}$$

[7] Gli spazi bianchi nelle matrici rappresentano degli zeri, il simbolo $\star$ prende il posto, per brevità, di un numero intero.

da cui, se

$$B_{k+1} \equiv \begin{pmatrix} I_{l-k-2} & & \\ & \tilde{A} & \\ & & I_k \end{pmatrix} B_k$$

ottengo

$$B_{k+1} v = \begin{pmatrix} v_{l-1} \\ \vdots \\ v_{l-k-2} \\ \star \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Box$$

Lemma 1.4 *Siano* $v^{(1)}, \ldots, v^{(r)} \in \mathbf{Z}^N$*. Allora* $\exists M \in \mathrm{Mat}(N \times N, \mathbf{Z})$ *con* $\det M = 1$ *in modo che*

$$(Mv^{(i)})_j = 0 \qquad \forall\, 1 \le i \le r,\ i+1 \le j \le N$$

DIM. Dal Lemma precedente, $\exists M_1 \in \mathrm{Mat}(N \times N, \mathbf{Z})$ tale che $\det M_1 = 1$ e $(M_1 v^{(1)})_j = 0$, $\forall 2 \le j \le N$.

Ragionando ricorsivamente, se supponiamo di aver trovato $M_k \in \mathrm{Mat}(N \times N, \mathbf{Z})$, $1 \le k \le r-1$, in modo che $\det M_k = 1$ e $(M_k v^{(i)})_j = 0$, $\forall 1 \le i \le k$, $i+1 \le j \le N$, allora, poichè dal Lemma precedente $\exists L \in \mathrm{Mat}((N-k) \times (N-k), \mathbf{Z})$ in modo che $\det L = 1$ e

$$(L \begin{pmatrix} (M_k v^{(k+1)})_{k+1} \\ \vdots \\ (M_k v^{(k+1)})_N \end{pmatrix})_j = 0 \qquad \forall 2 \le j \le N-k$$

definisco

$$M_{k+1} \equiv \begin{pmatrix} I_k & \\ & L \end{pmatrix} M_k$$

In questo modo, $\forall 1 \leq i \leq k$, $M_{k+1}v^{(i)} = M_k v^{(i)}$, per cui $(M_{k+1}v^{(i)})_j = 0$ $\forall i+1 \leq j \leq N$. E poi

$$M_{k+1}v^{(k+1)} = \begin{pmatrix} I_k & \\ & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (M_k v^{(k+1)})_1 \\ \vdots \\ (M_k v^{(k+1)})_k \\ (M_k v^{(k+1)})_{k+1} \\ \vdots \\ (M_k v^{(k+1)})_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (M_k v^{(k+1)})_1 \\ \vdots \\ (M_k v^{(k+1)})_k \\ \star \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \square$$

Proposizione 1.5 *Supponiamo che le frequenze soddisfino esattamente r relazioni indipendenti, cioè esistano $v^{(1)}, \ldots, v^{(r)} \in \mathbf{Z}^N$ linearmente indipendenti tali che $\omega_0 \cdot v^{(j)} = 0$, $\forall 1 \leq j \leq r$. Allora il moto $\{I(t) = I_0,\ \varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t\}$ si svolge su un toro di dimensione $N - r$.*

DIM. Dal Lemma precedente, $\exists M \in \mathrm{Mat}(N \times N, \mathbf{Z})$ con $\det M = 1$ in modo che

$$Mv^{(j)} = \begin{pmatrix} z_1^{(j)} \\ \vdots \\ z_j^{(j)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad j = 1, \ldots, r$$

con $z_i^{(j)}$, $1 \leq i \leq j$, coordinate intere. Siano

$$\theta \equiv (M^{-1})^* \varphi \qquad\qquad y \equiv -MI$$

Questa è una trasformazione canonica, in quanto si verifica subito che la jacobiana è simplettica. Ponendo $\Omega \equiv (M^{-1})^* \omega_0$, ho che

$$\begin{aligned} 0 &= (v^{(1)})^* \omega_0 = (M^{-1}\, M\, v^{(1)})^* \omega_0 = (M\, v^{(1)})^* (M^{-1})^* \omega_0 = \\ &= (z_1^{(1)}, 0, \ldots, 0)\, \Omega = z_1^{(1)} \Omega_1 \end{aligned}$$

e analogamente

$$0 = z_1^{(j)} \Omega_1 + \ldots + z_j^{(j)} \Omega_j \qquad\qquad j = 1, \ldots, r$$

Ovvero, definendo

$$R \equiv \begin{pmatrix} z_1^{(1)} & & & \\ z_1^{(2)} & z_2^{(2)} & & \\ \vdots & & & \\ z_1^{(r)} & & \dots & z_r^{(r)} \end{pmatrix}$$

si ottiene

$$R \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \vdots \\ \Omega_r \end{pmatrix} = 0$$

Per l'indipendenza dei $v^{(j)}$, R è invertibile, per cui $(\Omega_1, \dots, \Omega_r) = 0$. E allora:

$$\theta(t) = \theta_0 + (M^{-1})^* \omega_0 t = \theta_0 + \Omega t = \theta_0 + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \Omega_{r+1} \\ \vdots \\ \Omega_N \end{pmatrix} t$$

cioè il moto si svolge su

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{N-r} \quad = \quad & \{y(t) = y_0,\ (\theta)_j(t) = (\theta_0)_j \qquad 1 \le j \le r, \\ & (\theta)_i(t) = (\theta_0)_i + \Omega_i t \qquad r+1 \le i \le N\} \end{aligned}$$

□

Notiamo per completezza che nell'enunciato della precedente Proposizione è possibile sostituire l'espressione "$v^{(1)}, \dots, v^{(r)} \in \mathbf{Z}^N$ linearmente indipendenti" con[8] "$v^{(1)}, \dots, v^{(r)} \in \mathbf{Z}^N$ indipendenti su $\mathbf{Z}$":

Proposizione 1.6 *$v^{(1)}, \dots, v^{(r)} \in \mathbf{Z}^N$ sono linearmente indipendenti se e solo se sono indipendenti su $\mathbf{Z}$.*

[8] Dico che $v^{(1)}, \dots, v^{(r)} \in \mathbf{Z}^N \subset \mathbf{R}^N$ sono linearmente dipendenti se $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbf{R}$ non tutti nulli in modo che $\alpha_1 v^{(1)} + \dots + \alpha_r v^{(r)} = 0$.

Dico che $v^{(1)}, \dots, v^{(r)} \in \mathbf{Z}^N$ sono **dipendenti su Z** se $\exists n_1, \dots, n_r \in \mathbf{Z}$ non tutti nulli in modo che $n_1 v^{(1)} + \dots + n_r v^{(r)} = 0$.

DIM. Supponiamo che $\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbf{R}$ non tutti nulli in modo che

$$\alpha_1 v^{(1)} + \ldots + \alpha_r v^{(r)} = 0 \tag{1.1}$$

Sia

$$A \equiv \begin{pmatrix} v_1^{(1)} & \ldots & v_1^{(r)} \\ \vdots & & \vdots \\ v_N^{(1)} & \ldots & v_N^{(r)} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(N \times r, \mathbf{Z}) \subset \mathrm{Mat}(N \times r, \mathbf{Q}) \subset \mathrm{Mat}(N \times r, \mathbf{R})$$

Per maggiore chiarezza denoterò $A_{\mathbf{Q}}$ quando penserò la matrice A a valori nel campo $\mathbf{Q}$, e $A_{\mathbf{R}}$ quando la penserò a valori nel campo $\mathbf{R}$.

Sia $\rho \equiv \mathrm{Ran} A$: si osservi che, essendo il rango l'ordine di una sottomatrice il cui determinante è diverso da 0, $\mathrm{Ran} A_{\mathbf{Q}} = \mathrm{Ran} A_{\mathbf{R}}$.

Per il Teorema di Rouchè–Capelli[9] il sistema $A_{\mathbf{R}} x = 0$ ha $\infty^{r-\rho}$ soluzioni in $\mathbf{R}^r$. Poichè la (1.1) afferma che c'è una soluzione non banale, deve essere $r - \rho \geq 1$.

Ma Rouchè–Capelli dice anche che $A_{\mathbf{Q}} x = 0$ ha $\infty^{r-\rho}$ soluzioni in $\mathbf{Q}^r$: visto che $r - \rho \geq 1$, deve esserci una soluzione non banale $(a_1/b_1, \ldots, a_r/b_r)$.

Sia quindi $n_i \equiv b_1 \ldots b_{i-1} a_i b_{i+1} \ldots b_r$, $i = 1, \ldots, r$. Otteniamo

$$n_1 v^{(1)} + \ldots + n_r v^{(r)} = 0 \tag{1.2}$$

cioè la dipendenza lineare implica la dipendenza su $\mathbf{Z}$.

E il viceversa è ovvio. $\square$

[9] Se K è un campo, il sistema di N equazioni in r incognite $Mx = b$, con $M \in \mathrm{Mat}(N \times r, K)$, $b \in \mathrm{Mat}(N \times 1, K)$ possiede $\infty^{r - \mathrm{Ran} M}$ soluzioni in K^r.
Cfr. [S1], pag. 71.

2 Trasformazioni canoniche e funzioni generatrici

Definizione 2.1 *La matrice*

$$J \equiv \begin{pmatrix} 0_N & -I_N \\ I_N & 0_N \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2N \times 2N)$$

è detta **matrice simplettica standard***.*

Una matrice $A \in \mathrm{Mat}(2N \times 2N)$ *è detta* **simplettica** *se* $A^* \, J \, A = J$*.*

La proprietà fondamentale di J è quella di comportarsi "come l'unità immaginaria": $J^2 = -I_{2N}$. Inoltre: $J^* = -J = J^{-1}$ e $\det J = 1$.

Notare che dalla definizione si ottiene subito che, se A è simplettica, $\det A = \pm 1$, che[1] implica A invertibile.

Le equazioni di Hamilton nel formalismo simplettico assumono la forma $\dot{z} = J \, \nabla H(z)$, con $z = (p, q)$.

Proposizione 2.2 *S è simplettica $\Longleftrightarrow$ S^{-1} è simplettica $\Longleftrightarrow$ S^* è simplettica*

DIM. S simplettica $\Leftrightarrow$ $S^* J S = J$ $\Leftrightarrow$ $S^* J = J S^{-1}$ $\Leftrightarrow$ $J = (S^{-1})^* J S^{-1}$ $\Leftrightarrow$ S^{-1} simplettica.

S simplettica $\Leftrightarrow$ $S^* J S = J$ $\Leftrightarrow$ $S^* J = J S^{-1}$ $\Leftrightarrow$ $J S^* J = -S^{-1}$ $\Leftrightarrow$ $S J S^* J = -I_{2N}$ $\Leftrightarrow$ $S J S^* = J$ $\Leftrightarrow$ S^* simplettica. □

Definizione 2.3 *Un diffeomorfismo locale $g : (p, q) \mapsto (P, Q)$ sullo spazio delle fasi si dice* **trasformazione canonica** *se $\exists S(p, q)$ tale che*

$$p \cdot dq - P \cdot dQ = dS \tag{2.1}$$

Proposizione 2.4 *Se g è canonica, $\forall f$ questo diagramma è commutativo:*

$$\begin{array}{ccc} (p,q) & \xrightarrow{\Phi^t_f} & (p(t), q(t)) \\ g \downarrow & & \downarrow g \\ (P,Q) & \xrightarrow{\Phi^t_{\tilde{f}}} & (P(t), Q(t)) \end{array}$$

[1] In effetti il Corollario 2.14 mostrerà che $\det A = 1$.

dove $\tilde{f} \equiv f \circ g^{-1}$

DIM. Mostro che $(P(t), Q(t)) \equiv g \circ \Phi^t_f(p, q)$ minimizza l'azione relativa a $\tilde{f}$:

$$
\begin{aligned}
A_{\tilde{f}}(g \circ \gamma) &= \int_{(P(t),Q(t))=g\circ\gamma(t)} P(t) \cdot dQ(t) - \tilde{f}(P(t), Q(t))\, dt = \\
&= \int_{(p(t),q(t))=\gamma(t)} p(t) \cdot dq(t) - dS(p(t), q(t)) - f(p(t), q(t))\, dt = \\
&= \int_{(p(t),q(t))=\gamma(t)} p(t) \cdot dq(t) - f(p(t), q(t))\, dt - \Delta S = \\
&= A_f(\gamma) - \Delta S
\end{aligned}
$$

Poichè ΔS dipende solo dagli estremi di γ, ΔS è costante sulle traiettorie variate $\gamma_\varepsilon(t) = \gamma(t) + \varepsilon\, \delta\gamma(t)$, $t \in [0, 1]$, con $\delta\gamma(0) = 0 = \delta\gamma(1)$. Per cui essendo $\gamma(t) = \Phi^t_f(p, q)$ una traiettoria di minimo per A_f, allora $g \circ \Phi^t_f(p, q)$ sarà traiettoria minimizzante per $A_{\tilde{f}}$, cioè per il **Principio di minima azione**[2] $g \circ \Phi^t_f$ è soluzione delle equazioni del moto relativo a $\tilde{f}$ con punto iniziale $g(p, q) = (P, Q)$, cioè $g \circ \Phi^t_f(p, q) = \Phi^t_{\tilde{f}}(P, Q)$. $\Box$

Ecco alcune proprietà caratterizzanti la canonicità di una trasformazione:

Proposizione 2.5 *Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) g *verifica la* (2.1).

(ii) $\sum_{i=1}^{N} dP_i \wedge dQ_i = \sum_{i=1}^{N} dp_i \wedge dq_i$

(iii) $\oint p \cdot dq = \oint P \cdot dQ$

(iv) g *conserva le parentesi di Poisson:*
$\{F, G\}_{p,q} = \{\tilde{F}, \tilde{G}\}_{P,Q}$
con $\tilde{F} \equiv F \circ g^{-1}$, $\tilde{G} \equiv G \circ g^{-1}$.

(v) g *conserva le parentesi di Poisson fondamentali:*
$\{P_i, P_j\} = 0 = \{Q_i, Q_j\} \qquad \{Q_i, P_j\} = \delta_{ij}$

(vi) *La jacobiana* g' *appartiene al gruppo delle matrici simplettiche.*

---

[2]Cfr. [ARN], [FM], [GAL], [DAU].
"La quantità di azione è la vera spesa della natura, che essa amministra con la massima economia possibile."
(Maupertuis)

(vii) $[P,Q;q_j,q_k]=0,\ [P,Q;p_j,p_k]=0,\ [P,Q;p_j,q_k]=\delta_{jk}$,
avendo definito le **parentesi di Lagrange** *nel seguente modo:*
$\forall f,g\in \mathrm{C}^1(\mathbf{R}^{2N},\mathbf{R}^N)$ *e* $\eta,\zeta\in\{p_1,\dots,p_N,q_1,\dots,q_N\}$
$$[f,g;\eta,\zeta]\equiv\sum_{i=1}^N\left(\frac{\partial f_i}{\partial\eta}\frac{\partial g_i}{\partial\zeta}-\frac{\partial f_i}{\partial\zeta}\frac{\partial g_i}{\partial\eta}\right)$$

DIM. La (i) e la (ii) sono equivalenti per il Lemma di Poincarè; la (i) è equivalente alla (iii) perchè, come conseguenza del Teorema di De Rahm, una forma è esatta se e solo se l'integrale su un qualsiasi ciclo è nullo[3].

La (iv) e la (vi) sono equivalenti perchè, denotando $Z\equiv(P,Q)$, $z\equiv(p,q)$, si ha:
$$\{\tilde F,\tilde G\}_Z=\nabla_Z\tilde F\cdot J\,\nabla_Z\tilde G=\nabla_z F\cdot\frac{\partial z}{\partial Z}\,J\left(\frac{\partial z}{\partial Z}\right)^*\nabla_z G \tag{2.2}$$
per cui se la (vi) è verificata si ha $\{\tilde F,\tilde G\}_Z=\nabla_z F\cdot J\,\nabla_z G=\{F,G\}_z$. Viceversa, se è verificata la (iv), si ha
$$\nabla_z F\cdot J\,\nabla_z G=\nabla_z F\cdot\frac{\partial z}{\partial Z}\,J\left(\frac{\partial z}{\partial Z}\right)^*\nabla_z G \tag{2.3}$$
in cui prendendo a turno $F^{[i]}\equiv z_i$, $G^{[j]}\equiv z_j$, $i,j=1,\dots,2N$, si ottiene la (vi). Poi:

$(i)\implies(iv)$
$$\begin{aligned}\{F,G\}_{p,q}&=\frac{d}{dt}|_{t=0}\,F\circ\Phi^t_G(p,q)=\frac{d}{dt}|_{t=0}\,F\circ g^{-1}\circ g\circ\Phi^t_G(p,q)=\\&=\frac{d}{dt}|_{t=0}\,F\circ g^{-1}\circ\Phi^t_{\tilde G}\circ g(p,q)=\frac{d}{dt}|_{t=0}\,\tilde F\circ\Phi^t_{\tilde G}(P,Q)=\\&=\{\tilde F,\tilde G\}_{P,Q}\end{aligned}$$
usando anche la commutatività del diagramma della Proposizione 2.4.

$(iv)\implies(v)$ a fortiori

$(v)\iff(vi)$ con un calcolo diretto si ottiene:
$$\frac{\partial(P,Q)}{\partial(p,q)}\,J\left(\frac{\partial(P,Q)}{\partial(p,q)}\right)^*=\begin{pmatrix}\{P,P\}&\{P,Q\}\\\{Q,P\}&\{Q,Q\}\end{pmatrix} \tag{2.4}$$

[3] Cfr. [BOT].

$(ii) \iff (vi)$ userò le seguenti notazioni: $z \equiv (p,q)$ e

$$dx^*\,Ady = (dx_1,\ldots,dx_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} dy_1 \\ \vdots \\ dy_n\end{pmatrix} \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}dx_i \wedge dy_j$$

otteniamo cosí:

$$\begin{aligned} -2 \quad & \sum_{i=1}^{N}(dp_i \wedge dq_i - dP_i \wedge dQ_i) = dz^*\,Jdz - dZ^*\,JdZ = \\ = \quad & dz^*\,Jdz - dz^*\,\frac{\partial Z}{\partial z}^*\,J\,\frac{\partial Z}{\partial z}\,dz = dz^*\left(J - \frac{\partial Z}{\partial z}^*\,J\,\frac{\partial Z}{\partial z}\right)dz \end{aligned}$$

per cui $\sum(dp_i \wedge dq_i - dP_i \wedge dQ_i) = 0$ se e solo se $\dfrac{\partial Z}{\partial z}^*\,J\dfrac{\partial Z}{\partial z} = 0.$

$(ii) \iff (vii)$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} dP_i \wedge dQ_i \quad = \quad & \sum_{i,j,k=1}^{N}\left(\frac{\partial P_i}{\partial p_j}\frac{\partial Q_i}{\partial q_k} - \frac{\partial P_i}{\partial q_k}\frac{\partial Q_i}{\partial p_j}\right)dp_j \wedge dq_k + \\ + \quad & \sum_{\substack{1\le i\le N \\ 1\le j<k\le N}}\left(\frac{\partial P_i}{\partial q_j}\frac{\partial Q_i}{\partial q_k} - \frac{\partial P_i}{\partial q_k}\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\right)dq_j \wedge dq_k + \\ + \quad & \sum_{\substack{1\le i\le N \\ 1\le j<k\le N}}\left(\frac{\partial P_i}{\partial p_j}\frac{\partial Q_i}{\partial p_k} - \frac{\partial P_i}{\partial p_k}\frac{\partial Q_i}{\partial p_j}\right)dp_j \wedge dp_k = \\ = \quad & \sum_{i=1}^{N}[P,Q;p_j,q_k]dp_j \wedge dq_k + \sum_{\substack{1\le i\le N \\ 1\le j<k\le N}}[P,Q;q_j,q_k]dq_j \wedge dq_k + \\ + \quad & \sum_{\substack{1\le i\le N \\ 1\le j<k\le N}}[P,Q;p_j,p_k]dp_j \wedge dp_k \end{aligned}$$

per cui $\sum dP_i \wedge dQ_i = \sum dp_i \wedge dq_i$ se e solo se vale la (vii). $\square$

La (vi) della Proposizione 2.5 ci permette anche di invertire la Proposizione 2.4:

Proposizione 2.6 *Se $\forall f$ liscia questo diagramma è commutativo:*

$$
\begin{array}{ccc}
(p,q) & \xrightarrow{\Phi^t_f} & (p(t),q(t)) \\
g\downarrow & & \downarrow g \\
(P,Q) & \xrightarrow{\Phi^t_{\tilde f}} & (P(t),Q(t))
\end{array}
$$

dove $\tilde{f} \equiv f \circ g^{-1}$*, allora la trasformazione* g *è canonica.*

DIM. Per definizione $g \circ \Phi^t_f(p,q) = \Phi^t_{\tilde f} \circ g(p,q)$ se e solo se

$$\frac{d}{dt}\left(g \circ \Phi^t_f(p,q)\right) = J\,\nabla \tilde{f}(g \circ \Phi^t_f(p,q)) \tag{2.5}$$

Per cui ho che $\forall f$:

$$
\begin{aligned}
g'\left(\Phi^t_f(p,q)\right) J\,\nabla f(\Phi^t_f(p,q)) &= g'\left(\Phi^t_f(p,q)\right) \frac{d}{dt}\Phi^t_f(p,q) = \\
&= \frac{d}{dt}\left(g \circ \Phi^t_f(p,q)\right) = J\,\nabla \tilde{f}(g \circ \Phi^t_f(p,q)) = \\
&= J\,\nabla f(g^{-1} \circ g \circ \Phi^t_f(p,q)) \cdot (g^{-1})'(g \circ \Phi^t_f(p,q)) = \\
&= J\,\nabla f(\Phi^t_f(p,q)) \cdot (g^{-1})'(g \circ \Phi^t_f(p,q)) = \\
&= J \cdot \left((g^{-1})'\right)^* (g \circ \Phi^t_f(p,q))\ \nabla f(\Phi^t_f(p,q))
\end{aligned}
$$

cioè

$$g'\left(\Phi^t_f(p,q)\right) J\,\nabla f(\Phi^t_f(p,q)) = J \cdot \left((g^{-1})'\right)^* (g \circ \Phi^t_f(p,q))\ \nabla f(\Phi^t_f(p,q)) \tag{2.6}$$

in cui prendendo il tempo $t = 0$:

$$g'(p,q)\, J\ \nabla f(p,q) = J\left((g')^*\right)^{-1}\ \nabla f(p,q) \tag{2.7}$$

Per l'arbitrarietà di f, prendendo a turno $f^{[1]} \equiv p_1$,..., $f^{[N]} \equiv p_N$, $f^{[N+1]} \equiv q_1$,...,$f^{[2N]} \equiv q_N$, si può "elidere" ∇f e ottenere

$$g'(p,q)\, J = J\left((g')^*\right)^{-1} \tag{2.8}$$

con cui vedo che g' è simplettica, cioè, in virtù della Proposizione 2.5, g è canonica □

Nella Proposizione 2.6, il fatto che $\tilde{f} \equiv f \circ g^{-1}$ è essenziale: ci sono trasformazioni **non** canoniche per cui, $\forall f\ \exists f^\sharp$ che rende commutativo il diagramma

$$
\begin{array}{ccc}
(p,q) & \xrightarrow{\Phi^t_f} & (p(t),q(t)) \\
g\downarrow & & \downarrow g \\
(P,Q) & \xrightarrow{\Phi^t_{f^\sharp}} & (P(t),Q(t))
\end{array}
$$

come[4] ad esempio[5]: sia $N=1$, $(P,Q)=g(p,q)=(2p,q)$; g non è canonica perchè g' non è simplettica, però se $f^\sharp(P,Q)\equiv 2f(P/2,Q)$ si ottiene che $g\circ\Phi^t_f(p,q)=\Phi^t_{f^\sharp}(P,Q)$, infatti:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big(g\circ\Phi^t_f(p,q)\Big) &= \begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}\frac{d}{dt}\Phi^t_f(p,q)=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\partial_q f(p,q)\\ \partial_p f(p,q)\end{pmatrix}= \\
&= \begin{pmatrix}-2\partial_q f(p,q)\\ \partial_p f(p,q)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\partial_Q f^\sharp(P,Q)\\ \partial_P f^\sharp(P,Q)\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

La (iii) della Proposizione 2.5 mostra che il flusso hamiltoniano è canonico:

Proposizione 2.7 *Per ogni t fissato, l'applicazione $(p,q)\mapsto\Phi^t_H(p,q)$ è una trasformazione canonica.*

DIM. Sia $\gamma(\tau)=(p(\tau),q(\tau))$ un ciclo; denotando $(P^{(s)},Q^{(s)})\equiv\Phi^s_H(p,q)$ e

$$
\mathcal{F}(s)\equiv\oint_{(p(\tau),q(\tau))=\gamma(\tau)}P^{(s)}(p(\tau),q(\tau))\,dQ^{(s)}(p(\tau),q(\tau))=\oint_\gamma P^{(s)}\,dQ^{(s)} \tag{2.9}
$$

si ha:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\mathcal{F}(s) &= \oint_\gamma \frac{dP^{(s)}}{ds}\cdot dQ^{(s)}+P^{(s)}\cdot d\left(\frac{dQ^{(s)}}{ds}\right)= \\
&= \oint_\gamma -H_q(P^{(s)},Q^{(s)})\cdot dQ^{(s)}+P^{(s)}\cdot d\Big(H_p(P^{(s)},Q^{(s)})\Big)= \\
&= \oint_\gamma -dH(P^{(s)},Q^{(s)})+d\Big(P^{(s)}\cdot H_p(P^{(s)},Q^{(s)})\Big)=0
\end{aligned}
$$

[4]Si dice che tali trasformazioni, pur non essendo canoniche, "conservano la struttura canonica".

[5]Un altro esempio è dato dal riscalamento dei tempi: cfr. Proposizione 2.17.

dove ho usato il fatto che

$$d\left(P^{(s)}\cdot H_p(P^{(s)},Q^{(s)})\right)=P^{(s)}\cdot d\left(H_p(P^{(s)},Q^{(s)})\right)+dP^{(s)}\cdot H_p(P^{(s)},Q^{(s)})$$

Per cui $\mathcal{F}$ è costante, e allora $\mathcal{F}(0)=\mathcal{F}(t)$ $\square$

Ogni trasformazione canonica proviene da una funzione generatrice:

Lemma 2.8 *Sia* $W = \operatorname{span}\{w_1,\ldots,w_{n-k}\}$ *un sottospazio* $(n-k)-$*dimensionale dello spazio* $n-$*dimensionale* $E=\operatorname{span}\{\eta_1,\ldots,\eta_n\}$. *Allora* $\exists 1\le i_1<\ldots<i_k\le n$ *tali che*[6]*:*

$$\operatorname{span}\{\eta_{i_1},\ldots,\eta_{i_n}\}\oplus W = E \tag{2.10}$$

DIM. Sia η_{i_1} tale che $\eta_j\in W\ \forall j<i_1$ e $\eta_{i_1}\notin W$. Consideriamo ora $W+\operatorname{span}\{\eta_{i_1}\}$. Sia η_{i_2} tale che $\eta_j\in W+\operatorname{span}\{\eta_{i_1}\}\ \forall j<i_2$ e $\eta_{i_1}\notin W+\operatorname{span}\{\eta_{i_1}\}$. Consideriamo ora $W+\operatorname{span}\{\eta_{i_1},\eta_{i_2}\}$, ecc... Poichè ad ogni passaggio di questa iterazione la dimensione aumenta di uno, dovrò fermarmi in k passi, trovando $\eta_{i_1},\ldots,\eta_{i_k}$ in modo che $W+\operatorname{span}\{\eta_{i_1},\ldots,\eta_{i_k}\}=E$. Inoltre, per la formula di Grassmann:

$$\begin{aligned} n &= \dim E = \dim\left(W+\operatorname{span}\{\eta_{i_1},\ldots,\eta_{i_k}\}\right)= \\ &= \dim W + \dim\operatorname{span}\{\eta_{i_1},\ldots,\eta_{i_k}\} - \dim\left(W\cap\operatorname{span}\{\eta_{i_1},\ldots,\eta_{i_k}\}\right)= \\ &= n-k+k+\dim\left(W\cap\operatorname{span}\{\eta_{i_1},\ldots,\eta_{i_k}\}\right)\end{aligned}$$

ciò mostra $\dim\left(W\cap\operatorname{span}\{\eta_{i_1},\ldots,\eta_{i_k}\}\right)=0$, o, equivalentemente, $W\cap\operatorname{span}\{\eta_{i_1},\ldots,\eta_{i_k}\}=\{0\}$. $\square$

Definizione 2.9 *Sia* $V=\operatorname{span}\{v_1,\ldots,v_N\}$ *è un sottospazio dello spazio delle fasi* $\mathcal{M}=\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N=\operatorname{span}\{e_1,\ldots,e_{2N}\}$.

V si dice degenere se $\forall v,w\in V$ si ha $v\cdot Jw=0$.

Lemma 2.10 *Se V è degenere esiste una partizione* $(i_1,\ldots,i_k)(j_1,\ldots,j_{N-k})$ *di* $(1,\ldots,N)$ *in due insiemi disgiunti in modo che*

$$V\oplus\operatorname{span}\{e_{i_1},\ldots,e_{i_k},e_{N+j_1},\ldots,e_{N+j_{N-k}}\}=\mathcal{M} \tag{2.11}$$

[6] La notazione "+" va cosí intesa:

$$\operatorname{span}\{v_1,\ldots,v_n\}+\operatorname{span}\{w_1,\ldots,w_m\}\equiv\operatorname{span}\{v_1,\ldots,v_n,w_1,\ldots,w_m\}$$

Il simbolo "$\oplus$" indica la somma diretta: $X=A\oplus B \iff X=A+B$ e $A\cap B=\{0\}$.

DIM. Dati due sottospazi A e B, scriverò $A \perp_J B$ se $\forall a \in A, b \in B$ si ha $a \cdot Jb = 0$. Scriverò invece $A \perp B$ se $\forall a \in A, b \in B$ $a \cdot b = 0$. Per ipotesi ho che $V \perp_J V$. Siano $E \equiv \text{span}\{e_1, \ldots, e_N\}$ e $W \equiv V \cap E$. Poichè $W \subseteq V$ e $V \perp_J V$, deve essere $W \perp_J V$.

In virtù del Lemma precedente, c'è un sottospazio $U = \text{span}\{e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}\}$ in modo che $U \oplus W = E$. Sia $S \equiv \text{span}\{e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}, e_{N+j_1}, \ldots, e_{N+j_{N-k}}\}$. Si ha $U = S \cap E$.

Affermo che $S \perp_J S$: infatti $\forall a = a_{i_1}e_{i_1} + \ldots + a_{i_k}e_{i_k} + a_{N+j_1}e_{N+j_1} + \ldots + a_{N+j_{N-k}}e_{N+j_{N-k}}$, $b = b_{i_1}e_{i_1} + \ldots + b_{i_k}e_{i_k} + b_{N+j_1}e_{N+j_1} + \ldots + b_{N+j_{N-k}}e_{N+j_{N-k}} \in S$, si ha $a \cdot Jb = (a_{i_1}e_{i_1} + \ldots + a_{i_k}e_{i_k} + a_{N+j_1}e_{N+j_1} + \ldots + a_{N+j_{N-k}}e_{N+j_{N-k}}) \cdot (-b_{N+j_1}e_{j_1} - \ldots - b_{N+j_{N-k}}e_{j_{N-k}} + b_{i_1}e_{N+i_1} + \ldots + b_{i_k}e_{N+i_{N-k}} = 0$, poichè $j_n \neq i_m, \forall n, m$.

Ma da $U \subseteq S$ e $S \perp_J S$, segue che $U \perp_J S$.

Essendo poi $W \perp_J V$ e $U \perp_J S$, si ottiene $(W + U) \perp_J (V \cap S)$, cioè $E \perp_J (V \cap S)$.

Dico che $V \cap S \subseteq E$: P.A. $\exists \xi \in V \cap S$, $\xi \notin E$; si ha che $\forall \eta \in E, \forall \alpha \in \mathbf{R}$:

$$(\alpha\xi + \eta) \cdot J(\alpha\xi + \eta) = \alpha\xi \cdot J(\alpha\xi) + \eta \cdot J\eta = 0 \tag{2.12}$$

poichè $S \perp_J S$, $E \perp_J E$ e utilizzando anche l'antisimmetria di J. La (2.12) mostra che $(\text{span}\{\xi\} + E) \perp_J (\text{span}\{\xi\} + E)$, o, equivalentemente, $(\text{span}\{\xi\} + E) \perp J(\text{span}\{\xi\} + E)$. Dalla formula di Grassmann, dal fatto che J è non degenere e dall'ipotesi assurda $\xi \notin E$, otteniamo:

$$\begin{aligned} 2N &= \dim \mathcal{M} \geq \dim ((\text{span}\{\xi\} + E) \oplus J(\text{span}\{\xi\} + E)) = \\ &= \dim (\text{span}\{\xi\} + E) + \dim J(\text{span}\{\xi\} + E) = \\ &= 2\dim (\text{span}\{\xi\} + E) = 2\dim \text{span}\{\xi, e_1, \ldots, e_N\} = 2(N+1) \end{aligned}$$

che è assurdo.

Si ottiene cosí:

$$V \cap S = (V \cap S) \cap E = (V \cap E) \cap (S \cap E) = W \cap U = \{0\} \tag{2.13}$$

e, ancora con la formula di Grassmann:

$$\dim (V + S) = \dim V + \dim S = N + N = \dim \mathcal{M} \tag{2.14}$$

Le (2.13) (2.14) mostrano che $V \oplus S = \mathcal{M}$. □

Rispetto alla partizione nell'enunciato del precedente lemma, userò la seguente notazione: se $x, y \in \mathbf{R}^N$, $(x_j, y_i) \equiv (x_{j_1}, \ldots, x_{j_{N-k}}, y_{i_1}, \ldots, y_{i_k})$.

Lemma 2.11 *Sia $P(p,q), Q(p,q)$ una trasformazione canonica nell'intorno di (p_0, q_0).*

Esiste una partizione $(l_1, \ldots, l_h)(m_1, \ldots, m_{N-h})$ di $(1, \ldots, N)$ in due insiemi disgiunti in modo che

$$\det \frac{\partial(P_l, Q_m)}{\partial p} \neq 0$$

DIM. Sia $E \equiv \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_N\} \subset \mathcal{M}$ e sia $M \equiv \dfrac{\partial(P,Q)}{\partial(p,q)}$. Dalla simpletticità di M segue che ME è un sottospazio degenere: $\forall v, w \in E$, (essendo v e w della forma $(\bar{v}, 0)$ e $(\bar{w}, 0)$):

$$(Mv) \cdot J(Mw) = v \cdot M^* JMw = (\bar{v}, 0) \begin{pmatrix} 0 & -I_N \\ I_N & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{w} \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \qquad (2.15)$$

Per cui, grazie al Lemma precedente, esiste $(i_1, \ldots, i_k)(j_1, \ldots, j_{N-k})$ partizione di $(1, \ldots, N)$ in modo che $ME \oplus S = \mathcal{M}$, essendo

$$S \equiv \operatorname{span}\{e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}, e_{N+j_1}, \ldots, e_{N+j_{N-k}}\}$$

Sia $\bar{S} = \operatorname{span}\{e_{j_1}, \ldots, e_{j_{N-k}}, e_{N+i_1}, \ldots, e_{N+i_k}\}$. Sia P la proiezione di $\mathcal{M} = S \oplus \bar{S}$ su $\bar{S}$. Allora $T \equiv P|_{ME} : ME \longrightarrow \bar{S}$ è un'applicazione lineare tra spazi di dimensione N. Essa è iniettiva: sia $v \in ME$, $v = \sigma + \bar{\sigma}$ con $\sigma \in S$ e $\bar{\sigma} \in \bar{S}$; se $0 = T(v) = \bar{\sigma}$ segue che $v = \sigma \in ME \cap S = \{0\}$, cioè $v = 0$.

Poichè T è un'applicazione lineare tra spazi della stessa dimensione, segue che T è invertibile, cioè $\det T \neq 0$.

Sia ora $N \equiv M|_E : E \longrightarrow ME$: N è iniettiva (perchè M lo è, essendo $\det M = \pm 1$) e quindi $\det N \neq 0$.

Esplicitamente: sul generico elemento $(x, 0)$ di E, TN agisce cosí:

$$\begin{aligned} TN \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} &= T \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial p} & \frac{\partial P}{\partial q} \\ \frac{\partial Q}{\partial p} & \frac{\partial Q}{\partial q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= T \left(\sum_{n=1}^{N} (\sum_{l=1}^{N} \frac{\partial P_n}{\partial p_l} x_l) e_n + (\sum_{l=1}^{N} \frac{\partial Q_n}{\partial p_l} x_l) e_{N+n} \right) = \\ &= (\sum_{l=1}^{N} \frac{\partial P_{j_1}}{\partial p_l} x_l) e_{j_1} + \ldots + (\sum_{l=1}^{N} \frac{\partial P_{j_{N-k}}}{\partial p_l} x_l) e_{j_{N-k}} + \end{aligned}$$

$$+ \quad (\sum_{l=1}^{N} \frac{\partial Q_{i_1}}{\partial p_l} x_l) e_{N+i_1} + \ldots (\sum_{l=1}^{N} \frac{\partial Q_{i_k}}{\partial p_l} x_l) e_{N+i_k} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial P_{j_1}}{\partial p_1} & \ldots & \frac{\partial P_{j_1}}{\partial p_N} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial P_{j_{N-k}}}{\partial p_1} & \ldots & \frac{\partial P_{j_{N-k}}}{\partial p_N} \\ \frac{\partial Q_{i_1}}{\partial p_1} & \ldots & \frac{\partial Q_{i_1}}{\partial p_N} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial Q_{i_k}}{\partial p_1} & \ldots & \frac{\partial Q_{i_k}}{\partial p_N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = \frac{\partial (P_j, Q_i)}{\partial p} \, x$$

cioè la matrice che rappresenta TN (nella base di E in partenza e in quella di $\bar{S}$ in arrivo) è $\frac{\partial (P_j, Q_i)}{\partial p}$. Per cui

$$0 \neq \det T \cdot \det N = \det(TN) = \det \frac{\partial (P_j, Q_i)}{\partial p} \qquad \square$$

Teorema 2.12 *Sia $P(p,q), Q(p,q)$ una trasformazione canonica nell'intorno di (p_0, q_0). Allora esiste una partizione $(i_1, \ldots, i_k)(j_1, \ldots, j_{N-k})$ di $(1, \ldots, N)$ in due insiemi disgiunti tale che*

$$\det \frac{\partial (P_i, Q_j, q)}{\partial (p, q)} = \det \frac{\partial (P_i, Q_j)}{\partial p} \neq 0$$

e la trasformazione canonica è ottenuta da una funzione generatrice $\mathcal{G}(P_i, Q_j, q)$ tramite le relazioni

$$p = \partial_q \mathcal{G},\ Q_i = \partial_{P_i} \mathcal{G},\ P_j = -\partial_{Q_j} \mathcal{G}$$

DIM. Per il Lemma precedente esiste $(i_1, \ldots, i_k)(j_1, \ldots, j_{N-k})$ partizione di $(1, \ldots, N)$ in due insiemi disgiunti in modo che $\det \frac{\partial (P_i, Q_j)}{\partial p} \neq 0$.

Per cui[7]:

$$\det \frac{\partial (P_i, Q_j; q)}{\partial (p; q)} = \det \frac{\partial (P_i, Q_j)}{\partial p} \neq 0 \tag{2.16}$$

[7]Usando il fatto che, se $F = F(x, y)$,

$$\det \frac{\partial (F, x)}{\partial (y, x)} = \det \frac{\partial F}{\partial y}$$

Per il Teorema della Funzione Inversa, posso localmente esplicitare la p: $p = p(P_i, Q_j)$.

Per la canonicità so inoltre che $\exists S(p,q)$ in modo che $p \cdot dq - P \cdot dQ = dS$.

Sia quindi $\mathcal{G}(P_i, Q_i, Q_j, q) \equiv P_i \cdot Q_i + S(p(P_i, Q_j), q)$; differenziando ambo i membri si ottiene:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_i} \cdot dP_i + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial Q_i} \cdot dQ_i + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial Q_j} \cdot dQ_j + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q} \cdot dq = \\ = \; & P_i \cdot dQ_i + Q_i \cdot dP_i + dS = \\ = \; & P_i \cdot dQ_i + Q_i \cdot dP_i + p \cdot dq - P \cdot dQ = \\ = \; & -P_j \cdot dQ_j + Q_i \cdot dP_i + p \cdot dq \end{aligned}$$

da cui $\dfrac{\partial \mathcal{G}}{\partial Q_i} = 0$, cioè $\mathcal{G} = \mathcal{G}(P_i, Q_j, q)$ e

$$Q_i = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_i} \qquad P_j = -\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial Q_j} \qquad p = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q}$$

Notiamo anche che

$$\begin{aligned} \det \frac{\partial(P_j, Q_i)}{\partial q} &= \det \frac{\partial}{\partial q} \left(-\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial Q_j}, \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_i} \right) = \pm \det \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial Q_j}, \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_i} \right) = \\ &= \pm \det \left(\frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial q \partial Q_j}, \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial q \partial P_i} \right) = \pm \det \frac{\partial}{\partial(Q_j, P_i)} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q} = \\ &= \pm \det \frac{\partial p}{\partial(Q_j, P_i)} = \pm \left(\det \frac{\partial(P_i, Q_j)}{\partial p} \right)^{-1} \neq 0 \end{aligned}$$

per cui posso esprimere anche q in funzione delle variabili (P_j, Q_i), a loro volta funzione di (P_i, Q_j): in definitiva $p = p(P_i, Q_j)$, $q = q(P_i, Q_j)$, $P_j = P_j(P_i, Q_j)$, $Q_i = Q_i(P_i, Q_j)$. $\square$

Teorema 2.13 *Il determinante jacobiano di una trasformazione canonica è uguale a uno.*

DIM. Sia $\mathcal{G}$ la funzione generatrice della trasformazione canonica $P(p,q)$, $Q(p,q)$ che otteniamo dal Teorema precedente. Poichè

$$\det \frac{\partial(P;Q)}{\partial(p;q)} = \det \frac{\partial(P_i, Q_j; Q_i, P_j)}{\partial(p_i, q_j; q_i, p_j)}$$

ho che:

$$\det\frac{\partial(P_i,Q_j;Q_i,P_j)}{\partial(P_i,Q_j;q)}=\det\frac{\partial(P_i,Q_j;Q_i,P_j)}{\partial(p_i,q_j;q_i,p_j)}\cdot\det\frac{\partial(p_i,q_j;q_i,p_j)}{\partial(P_i,Q_j;q)}=$$

$$=\det\frac{\partial(P;Q)}{\partial(p;q)}\cdot\det\frac{\partial(p_i,q_j;q_i,p_j)}{\partial(P_i,Q_j;q)}=\det\frac{\partial(P;Q)}{\partial(p;q)}\cdot\det\frac{\partial(p;q)}{\partial(P_i,Q_j;q)}\cdot(-1)^j$$

ovvero:

$$\det\frac{\partial(Q_i,P_j)}{\partial q}=\det\frac{\partial(P;Q)}{\partial(p;q)}\cdot\det\frac{\partial p}{\partial(P_i,Q_j)}\cdot(-1)^j$$

cioè:

$$\det\frac{\partial(P;Q)}{\partial(p;q)}=(-1)^j\cdot\frac{\det\dfrac{\partial(Q_i,P_j)}{\partial q}}{\det\dfrac{\partial p}{\partial(P_i,Q_j)}}=(-1)^j\cdot\frac{\det(\dfrac{\partial^2\mathcal{G}}{\partial q\partial P_i},-\dfrac{\partial^2\mathcal{G}}{\partial q\partial Q_j})}{\det(\dfrac{\partial^2\mathcal{G}}{\partial q\partial P_i},\dfrac{\partial^2\mathcal{G}}{\partial q\partial Q_j})}=$$

$$=(-1)^{2j}\cdot\frac{\det(\dfrac{\partial^2\mathcal{G}}{\partial q\partial P_i},\dfrac{\partial^2\mathcal{G}}{\partial q\partial Q_j})}{\det(\dfrac{\partial^2\mathcal{G}}{\partial q\partial P_i},\dfrac{\partial^2\mathcal{G}}{\partial q\partial Q_j})}=1 \qquad \square$$

Corollario 2.14 *Il determinante di una matrice simplettica è uguale a uno.*

DIM. Sia $S\in\mathrm{Mat}(2N\times 2N)$ simplettica, $S=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ con $a,b,c,d\in\mathrm{Mat}(N\times N)$.

Sia $P\equiv ap+bq$, $Q\equiv cp+dq$: questa è una trasformazione canonica perchè il suo jacobiano è S, che è simplettica.

Dal Teorema precedente $\det S=\det\dfrac{\partial(P,Q)}{\partial(p,q)}=1$. $\square$

2.1 Alcuni risultati sulle trasformazioni canoniche vicine all'identità

Proposizione 2.15 *Ogni trasformazione canonica vicina all'identità*

$$(P,Q)=(p+\varepsilon\Psi_1(p,q;\varepsilon),q+\varepsilon\Psi_2(p,q;\varepsilon))$$

ammette una funzione generatrice del tipo

$$\mathcal{G}(P,q;\varepsilon) = P\cdot q + \varepsilon\chi(P,q;\varepsilon)$$

DIM. Possiamo assumere (P,q) come variabili indipendenti, visto che

$$\det\frac{\partial(P,q)}{\partial(p,q)} = \det\begin{pmatrix} I_N + \varepsilon\partial_p\Psi_1 & \varepsilon\partial_q\Psi_1 \\ 0_N & I_N \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

è non nullo per $\varepsilon = 0$ e quindi, per continuità, è non nullo per ε sufficientemente piccolo. Quindi $(p,q) = (p(P,q),q)$.

Supponiamo per semplicità $N = 1$. Per la canonicità della trasformazione si deve avere $dp\wedge dq = dP\wedge dQ$, cioè

$$d(P - \varepsilon\Psi_1(p(P,q),q))\wedge dq = dP\wedge d(q + \varepsilon\Psi_2(p(P,q),q)) \tag{2.18}$$

ovvero

$$\frac{\partial\Psi_1}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial P} + \frac{\partial\Psi_2}{\partial q} + \frac{\partial\Psi_2}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial q} = 0 \tag{2.19}$$

Sia dunque $\tau \equiv -\Psi_1(p(P,q),q)dq + \Psi_2(p(P,q),q)dP$. Allora

$$d\tau = -\left(\frac{\partial\Psi_1}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial P} + \frac{\partial\Psi_2}{\partial q} + \frac{\partial\Psi_2}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial q}\right) dP\wedge dq = 0 \tag{2.20}$$

Per il Lemma di Poincarè[8], esiste χ in modo che $\tau = d\chi$, cioè $\Psi_1 = -\partial_q\chi$ e $\Psi_2 = \partial_P\chi$.

Tale dimostrazione "unidimensionale" si generalizza in dimensione $N \geq 1$ ponendo[9]:

$$\begin{aligned} \tau &\equiv -\Psi_1(p(P,q),q)\cdot dq + \Psi_2(p(P,q),q)\cdot dP = \\ &= \varepsilon^{-1}(p(P,q) - P)\cdot dq + \varepsilon^{-1}(Q(P,q) - q)\cdot dP = \\ &= \varepsilon^{-1}\sum_{i=1}^{N} p_i dq_i - P_i dq_i + Q_i dP_i - q_i dP_i \end{aligned}$$

abbiamo: $d\tau = \varepsilon^{-1}(\sum_{i=1}^N dp_i\wedge dq_i - \sum_{i=1}^N dP_i\wedge dQ_i) = 0$ per la canonicità della trasformazione. Invocando il Lemma di Poincarè, $\exists\chi$ tale che $\tau = d\chi$. Cioè $\Psi_1 = -\partial_q\chi$ e $\Psi_2 = \partial_P\chi$. □

[8]Cfr. [BOT].

[9]Se $\varepsilon = 0$ il risultato è banale, quindi supporrò $\varepsilon \neq 0$.

Proposizione 2.16 *Una famiglia di trasformazioni canoniche vicine all'identità del tipo*[10]

$$(P,Q) = \Phi(p,q;\varepsilon) = (p + \varepsilon\Psi_1(p,q), q + \varepsilon\Psi_2(p,q))$$

con la condizione

$$\Phi\left(\Phi(p,q;\varepsilon_1);\varepsilon_2\right) = \Phi(p,q;\varepsilon_1+\varepsilon_2) \tag{2.21}$$

è un flusso hamiltoniano, cioè $\exists H(p,q)$ *tale che* $\Phi(p,q;\varepsilon) = \Phi_H^\varepsilon(p,q)$. *Ciò è vero globalmente se* $(p,q) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$ *e localmente se* $(p,q) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{T}^N$.

DIM. Supponiamo per semplicità $N = 1$. Per la canonicità di Φ deve aversi

$$\begin{aligned}
0 &= -dp\wedge dq + dP\wedge dQ = -dp\wedge dq + d(p+\varepsilon\Psi_1)\wedge d(q+\varepsilon\Psi_2) = \\
&= -dp\wedge dq + \\
&+ \left(dp + \varepsilon\frac{\partial\Psi_1}{\partial p}dp + \varepsilon\frac{\partial\Psi_1}{\partial q}dq\right)\wedge\left(dq + \varepsilon\frac{\partial\Psi_2}{\partial p}dp + \varepsilon\frac{\partial\Psi_2}{\partial q}dq+\right) = \\
&= \varepsilon\left(\frac{\partial\Psi_2}{\partial q} + \frac{\partial\Psi_1}{\partial p} + \varepsilon\frac{\partial\Psi_1}{\partial p}\frac{\partial\Psi_2}{\partial q} - \varepsilon\frac{\partial\Psi_1}{\partial q}\frac{\partial\Psi_2}{\partial p}\right)dp\wedge dq
\end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{\partial\Psi_2}{\partial q} + \frac{\partial\Psi_1}{\partial p} = \varepsilon\left(\frac{\partial\Psi_1}{\partial q}\frac{\partial\Psi_2}{\partial p} - \frac{\partial\Psi_1}{\partial p}\frac{\partial\Psi_2}{\partial q}\right) \tag{2.22}$$

che derivata rispetto a ε porta a

$$\frac{\partial\Psi_1}{\partial q}\frac{\partial\Psi_2}{\partial p} - \frac{\partial\Psi_1}{\partial p}\frac{\partial\Psi_2}{\partial q} = 0 \tag{2.23}$$

eva Sostituendo (2.23) in (2.22) si ottiene

$$\frac{\partial\Psi_2}{\partial q} + \frac{\partial\Psi_1}{\partial p} = 0 \tag{2.24}$$

[10]In [FM], con il formalismo delle matrici hamiltoniane e dei gruppi a un parametro, si può trovare una dimostrazione di questo risultato più in generale per trasformazioni canoniche del tipo

$$(P,Q) = \Phi(p,q;\varepsilon) = (p + \varepsilon\Psi_1(p,q;\varepsilon), q + \varepsilon\Psi_2(p,q;\varepsilon))$$

Sia $(p^\star, q^\star) \equiv \Phi(p, q; \varepsilon)$. Dalla (2.21) si ha:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon}(p, q; \varepsilon) &= \lim_{\eta \longrightarrow 0} \frac{\Phi(p, q; \varepsilon + \eta) - \Phi(p, q; \varepsilon)}{\eta} = \\ &= \lim_{\eta \longrightarrow 0} \frac{\Phi(p^\star, q^\star; \eta) - \Phi(p^\star, q^\star; 0)}{\eta} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon}(p^\star, q^\star; 0) \quad (2.25)\end{aligned}$$

Sia ora $\sigma \equiv -\Psi_1(p^\star, q^\star) dq^\star + \Psi_2(p^\star, q^\star) dp^\star$, pensando $p^\star, q^\star$ come nuove variabili indipendenti. Dalla (2.24) si ha $d\sigma = 0$, per cui, per il Lemma di Poincarè, esiste $H(p, q)$ tale che $\sigma = dH$, che è quanto dire $\Psi_1(p^\star, q^\star) = -\partial_q H(p^\star, q^\star)$ e $\Psi_2(p^\star, q^\star) = \partial_p H(p^\star, q^\star)$.

E allora, in virtù della (2.25)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon}(p, q; \varepsilon) &= \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon}(p^\star, q^\star; 0) = \Psi(p^\star, q^\star) = \\ &= J\,\nabla H(p^\star, q^\star) = J\,\nabla H(\Phi(p, q; \varepsilon)) \quad (2.26)\end{aligned}$$

che mostra la struttura di flusso hamiltoniano.

In dimensione $N \geq 1$ procediamo cosí: essendo la trasformazione canonica, si conservano le parentesi di Poisson:

$$0 = \{P_j, P_i\} = \{p_j + \varepsilon \Psi_{1,j}, p_i + \varepsilon \Psi_{1,i}\} =$$

$$= \varepsilon \{p_j, \Psi_{1,i}\} + \varepsilon \{\Psi_{1,j}, p_i\} + \varepsilon^2 \{\Psi_{1,j}, \Psi_{1,i}\} =$$

$$= \varepsilon \left(-\frac{\partial \Psi_{1,i}}{\partial q_j} + \frac{\partial \Psi_{1,j}}{\partial q_i} + \varepsilon \sum_{1 \leq h \leq N} \frac{\partial \Psi_{1,j}}{\partial q_h} \frac{\partial \Psi_{1,i}}{\partial p_h} - \frac{\partial \Psi_{1,j}}{\partial p_h} \frac{\partial \Psi_{1,i}}{\partial q_h} \right) \quad (2.27)$$

e analogamente

$$0 = \{Q_i, Q_j\} =$$

$$= \varepsilon \left(\frac{\partial \Psi_{2,j}}{\partial p_i} - \frac{\partial \Psi_{2,i}}{\partial p_j} + \varepsilon \sum_{1 \leq h \leq N} \frac{\partial \Psi_{2,i}}{\partial q_h} \frac{\partial \Psi_{2,j}}{\partial p_h} - \frac{\partial \Psi_{2,i}}{\partial p_h} \frac{\partial \Psi_{2,j}}{\partial q_h} \right) \quad (2.28)$$

e

$$\delta_{ij} = \{Q_i, P_j\} =$$

$$= \delta_{ij} + \varepsilon \left(\frac{\partial \Psi_{1,j}}{\partial p_i} + \frac{\partial \Psi_{2,i}}{\partial q_j} + \varepsilon \sum_{1 \leq h \leq N} \frac{\partial \Psi_{2,i}}{\partial q_h} \frac{\partial \Psi_{1,j}}{\partial p_h} - \frac{\partial \Psi_{2,i}}{\partial p_h} \frac{\partial \Psi_{1,j}}{\partial q_h} \right) \quad (2.29)$$

Le (2.27), (2.28), (2.29) implicano le seguenti:

$$0 = -\frac{\partial \Psi_{1,i}}{\partial q_j} + \frac{\partial \Psi_{1,j}}{\partial q_i} + \varepsilon \sum_{1 \le h \le N} \frac{\partial \Psi_{1,j}}{\partial q_h} \frac{\partial \Psi_{1,i}}{\partial p_h} - \frac{\partial \Psi_{1,j}}{\partial p_h} \frac{\partial \Psi_{1,i}}{\partial q_h} \tag{2.30}$$

$$0 = \frac{\partial \Psi_{2,j}}{\partial p_i} - \frac{\partial \Psi_{2,i}}{\partial p_j} + \varepsilon \sum_{1 \le h \le N} \frac{\partial \Psi_{2,i}}{\partial q_h} \frac{\partial \Psi_{2,j}}{\partial p_h} - \frac{\partial \Psi_{2,i}}{\partial p_h} \frac{\partial \Psi_{2,j}}{\partial q_h} \tag{2.31}$$

$$0 = \frac{\partial \Psi_{1,j}}{\partial p_i} + \frac{\partial \Psi_{2,i}}{\partial q_j} + \varepsilon \sum_{1 \le h \le N} \frac{\partial \Psi_{2,i}}{\partial q_h} \frac{\partial \Psi_{1,j}}{\partial p_h} - \frac{\partial \Psi_{2,i}}{\partial p_h} \frac{\partial \Psi_{1,j}}{\partial q_h} \tag{2.32}$$

Derivando rispetto a ε le (2.30), (2.31), (2.32) si ottengono le seguenti relazioni:

$$\sum_{1 \le h \le N} \frac{\partial \Psi_{1,j}}{\partial q_h} \frac{\partial \Psi_{1,i}}{\partial p_h} - \frac{\partial \Psi_{1,j}}{\partial p_h} \frac{\partial \Psi_{1,i}}{\partial q_h} = 0 \tag{2.33}$$

$$\sum_{1 \le h \le N} \frac{\partial \Psi_{2,i}}{\partial q_h} \frac{\partial \Psi_{2,j}}{\partial p_h} - \frac{\partial \Psi_{2,i}}{\partial p_h} \frac{\partial \Psi_{2,j}}{\partial q_h} = 0 \tag{2.34}$$

$$\sum_{1 \le h \le N} \frac{\partial \Psi_{2,i}}{\partial q_h} \frac{\partial \Psi_{1,j}}{\partial p_h} - \frac{\partial \Psi_{2,i}}{\partial p_h} \frac{\partial \Psi_{1,j}}{\partial q_h} = 0 \tag{2.35}$$

Sostituendo le (2.33), (2.34), (2.35) nelle (2.30), (2.31), (2.32):

$$-\frac{\partial \Psi_{1,i}}{\partial q_j} + \frac{\partial \Psi_{1,j}}{\partial q_i} = 0 \tag{2.36}$$

$$\frac{\partial \Psi_{2,j}}{\partial p_i} - \frac{\partial \Psi_{2,i}}{\partial p_j} = 0 \tag{2.37}$$

$$\frac{\partial \Psi_{1,j}}{\partial p_i} + \frac{\partial \Psi_{2,i}}{\partial q_j} = 0 \tag{2.38}$$

Se definiamo $\sigma \equiv \sum_{1 \le i \le N} -\Psi_{1,i}(p^\star, q^\star) dq_i^\star + \Psi_{2,i}(p^\star, q^\star) dp_i^\star$, otteniamo, grazie alle (2.36), (2.37), (2.38):

$$\begin{aligned} d\sigma &= \sum_{1 \le i,j \le N} -\frac{\partial \Psi_{1,i}}{\partial p_j}(p^\star, q^\star) dp_j^\star \wedge dq_i^\star - \frac{\partial \Psi_{1,i}}{\partial q_j}(p^\star, q^\star) dq_j^\star \wedge dq_i^\star + \\ &+ \frac{\partial \Psi_{2,i}}{\partial p_j}(p^\star, q^\star) dp_j^\star \wedge dp_i^\star - \frac{\partial \Psi_{2,i}}{\partial q_j}(p^\star, q^\star) dp_i^\star \wedge dq_j^\star = \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= & -\sum_{1\le i<j\le N}\left(\frac{\partial\Psi_{2,j}}{\partial p_i}(p^\star,q^\star)-\frac{\partial\Psi_{2,i}}{\partial p_j}(p^\star,q^\star)\right)dp_j^\star\wedge dp_i^\star+\\
+ & \sum_{1\le i<j\le N}\left(-\frac{\partial\Psi_{1,i}}{\partial q_j}(p^\star,q^\star)+\frac{\partial\Psi_{1,j}}{\partial q_i}(p^\star,q^\star)\right)dq_j^\star\wedge dq_i^\star-\\
- & \sum_{1\le i,j\le N}\left(\frac{\partial\Psi_{1,j}}{\partial p_i}(p^\star,q^\star)+\frac{\partial\Psi_{2,i}}{\partial q_j}(p^\star,q^\star)\right)dp_i^\star\wedge dq_j^\star=0
\end{aligned}
$$

Per il Lemma di Poincarè, esiste $H(p,q)$ tale che $\sigma = dH$. Il che, procedendo come nella (2.26), mostra la struttura di flusso hamiltoniano di $\Phi(p,q;\varepsilon)$. $\square$

La Proposizione 2.16 vale globalmente sullo spazio delle fasi $\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N$, ma[11] **solo localmente** su $\mathbf{R}^N\times\mathbf{T}^N$, come mostra l'esempio seguente:

$$
P\equiv p+\varepsilon \qquad\qquad Q\equiv q \tag{2.39}
$$

con $(p,q)\in\mathbf{R}\times\mathrm{S}^1$, è canonica perchè $dP\wedge dQ = dp\wedge dq$. La (2.39) non è però un flusso hamiltoniano globale: se fosse $\Phi_H^\varepsilon(p,q)=(p+\varepsilon,q)$ per qualche H, si avrebbe

$$
J\nabla H(p,q)=\frac{d}{d\varepsilon}\Phi_H^\varepsilon(p,q)=(1,0) \tag{2.40}
$$

cioè $\partial_q H = -1$ e $\partial_p H = 0$, che conduce a $H(q) = -q + \text{cost}$. Imponendo $H(q+2\pi) = H(q)$ si giunge a contraddizione.

L'ipotesi (2.21) nella Proposizione 2.16 è ovviamente necessaria per avere una struttura di flusso. Essa **non** è una richiesta sovrabbondante, nel senso che non è garantita dalla canonicità di Φ: ad esempio:

$$
(P,Q)=\Phi(p,q;\varepsilon)=(p-\varepsilon\frac{2q}{1-p},q+\varepsilon\frac{q^2}{(1-p)^2}) \tag{2.41}
$$

verifica $dP\wedge dQ = dp\wedge dq$, però non rispetta la (2.21).

[11]La causa di ciò è che il primo gruppo di (co-)omologia di $\mathbf{T}^N$ non possiede solo l'elemento zero: $H^1(\mathbf{T}^N)\cong\mathbf{R}^N$. Ciò può essere dimostrato per induzione usando, ad esempio, i numeri di Betti (cfr. [GH], pag. 128) $b_q(X)\equiv\dim H^q(X)$: dalla proprietà $b_q(X\times\mathrm{S}^1)=b_q(X)+b_{q-1}(X)$ si ottiene, con l'ipotesi induttiva

$$
b_1(\mathbf{T}^N)=b_1(Y\times\mathrm{S}^1)=b_1(Y)+b_0(Y)=b_1(Y)+1=(N-1)+1=N
$$

avendo posto $Y\equiv\underbrace{\mathrm{S}^1\times\ldots\times\mathrm{S}^1}_{N-1\ \text{volte}}=\mathbf{T}^{N-1}$.

Il vantaggio di lavorare con trasformazioni canoniche vicine all'identità sta nel fatto che esse cambiano "di poco" il moto: se $(P, Q) = (p, q) + \varepsilon\Psi(p, q; \varepsilon)$ e $|(p(t), q(t))| < R$ è un'orbita limitata, ho che

$$|(P(t), Q(t))| \leq |(p(t), q(t))| + \varepsilon \sup_{|(p,q)|<R, |\varepsilon|<1} |\Psi| < R + \varepsilon \sup_{|(p,q)|<R, |\varepsilon|<1} |\Psi|$$

Trasformazioni canoniche vicine all'identità ma singolari possono invece trasformare un moto limitato in uno illimitato: consideriamo l'esempio del pendolo:

$$H(I, \varphi) = I^2 + \cos\varphi - 1 \qquad I, \varphi \in \mathbf{R}$$

con dati iniziali $I(0) = \sqrt{2}$ e $\varphi(0) = \pi$: si tratta della traiettoria asintotica

$$(I(t), \varphi(t)) \xrightarrow{t\to-\infty} (0, 0) \qquad (I(t), \varphi(t)) \xrightarrow{t\to+\infty} (0, 2\pi)$$

che è limitata tanto in I quanto in φ. La trasformazione canonica

$$y = I - \frac{\varepsilon^2}{I} \qquad x = \varphi - \frac{\varepsilon^2\varphi}{I^2 + \varepsilon^2}$$

è fatta in modo che $y(t) \xrightarrow{t\to\pm\infty} -\infty$.

Osserviamo infine che le trasformazioni canoniche, anche quelle vicine all'identità e non singolari, possono mandare moti illimitati in alcune variabili in moti illimitati in ogni variabile: consideriamo ad esempio il sistema

$$H(p, q) = p \qquad p, q \in \mathbf{R}$$

con dati iniziali $p(0) = q(0) = 0$. Si ottiene $p(t) = 0$, $q(t) = t$, che è un moto limitato nella p e illimitato nella q. La trasformazione canonica

$$P = p + \varepsilon q \qquad Q = q$$

porta tale moto in $P(t) = \varepsilon t$, $Q(t) = t$ che è illimitato in entrambe le variabili.

2.2 Trasformazioni di Lie

Proposizione 2.17 (Riscalamento nei tempi) [12] *Fissato* $\alpha \in \mathbf{R} - \{0\}$, *sia* $(p(t), q(t)) = \Phi_H^t(p,q)$ *e* $\tau \equiv \alpha t$. *Allora* $P(\tau) \equiv p(\tau\alpha^{-1})$ *e* $Q(\tau) \equiv q(\tau\alpha^{-1})$ *verificano le equazioni di Hamilton*

$$\frac{dP}{d\tau} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q}(P(\tau), Q(\tau))$$

$$\frac{dQ}{d\tau} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P}(P(\tau), Q(\tau))$$

con $\mathcal{H}(x,y) \equiv \alpha^{-1} H(x,y)$. *Cioè*[13]

$$(P(\tau), Q(\tau)) = \Phi_{\mathcal{H}}^{\tau}(p,q)$$

In particolare $\Phi_H^t(p,q) = \Phi_{\alpha^{-1}H}^{\alpha t}(p,q)$.

DIM. Si ha:

$$\frac{dP}{d\tau}(\tau) = \frac{d}{d\tau} p(\frac{\tau}{\alpha}) = \frac{dp}{dt}(\frac{\tau}{\alpha})\frac{dt}{d\tau} = \frac{dp}{dt}(\frac{\tau}{\alpha})\frac{1}{\alpha} =$$

$$= -\frac{\partial H}{\partial q}(p(\frac{\tau}{\alpha}), q(\frac{\tau}{\alpha}))\frac{1}{\alpha} = -\frac{\partial H}{\partial q}(P(\tau), Q(\tau))\frac{1}{\alpha} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q}(P(\tau), Q(\tau)) \quad (2.42)$$

L' ultima affermazione deriva da:

$$\Phi_H^t(p,q) = (p(t), q(t)) = (P(\tau), Q(\tau)) = \Phi_{\mathcal{H}}^{\tau}(p,q) = \Phi_{\alpha^{-1}H}^{\alpha t}(p,q) \qquad \square$$

Proposizione 2.18 *Sia* $V \subseteq \mathbf{R}^N$. *Siano*

$$V_\rho \equiv \bigcup_{z_0 \in V} \{z \in \mathbf{C}^N \ \text{ tc } \ |z - z_0| < \rho\}$$

$$\mathcal{T}_\sigma \equiv \bigcup_{z_0 \in \mathbf{T}^N} \{z \in \mathbf{C}^N \ \text{ tc } \ |z - z_0| < \sigma\}$$

[12] "Non è facile condurre la tua mente abbastanza lontano dalle convenzioni di ciò che tu chiami mondo reale per liberarla dal tempo che conosci. Il tempo stesso, probabilmente, non è altro che un modo di strutturare la realtà affinchè le nostre menti possano ricavarne un senso."
(M.Z. Bradley)

[13] Si noti che $(P(0), Q(0)) = (p(0), q(0)) = (p,q)$.

Sia $\chi(p,q)$ *analitica su* $V_\rho \times \mathcal{T}_\sigma$. *Fissati* $0<\rho'<\rho$ *e* $0<\sigma'<\sigma$, *sia* $\varepsilon_0>0$ *tale che*

$$\varepsilon_0 \max\left\{\frac{\sup_{V_\rho\times\mathcal{T}_\sigma,\,1\le i\le N}|\chi_{q_i}|}{\rho-\rho'}, \frac{\sup_{V_\rho\times\mathcal{T}_\sigma,\,1\le i\le N}|\chi_{p_i}|}{\sigma-\sigma'}\right\}<1$$

Allora $\forall\varepsilon\in\mathbf{C}$, $|\varepsilon|\le\varepsilon_0$, *il flusso hamiltoniano* Φ_χ^ε *è analitico e*

$$\Phi_\chi^\varepsilon \;:\; V_{\rho'}\times\mathcal{T}_{\sigma'} \longrightarrow V_\rho\times\mathcal{T}_\sigma$$

DIM. Φ_χ^ε è analitico perchè limite uniforme di approssimanti di Picard analitici.

Se $(p,q)\in V_{\rho'}\times\mathcal{T}_{\sigma'}$, $\exists(\bar p,\bar q)\in\mathbf{C}^{2N}$ tali che $|p-\bar p|<\rho'$ e $|q-\bar q|<\sigma'$.

Denoto $(p(\varepsilon),q(\varepsilon))=\Phi_\chi^\varepsilon(p,q)$. Affermo che $(p(\varepsilon),q(\varepsilon))\in V_\rho\times\mathcal{T}_\sigma$, $\forall\varepsilon\in\mathbf{C}$, $|\varepsilon|<\varepsilon_0$: P.A. sia $\bar\varepsilon$ il tempo di prima uscita; sia cioè $\bar\varepsilon$ tale che $(p(\varepsilon),q(\varepsilon))\in V_\rho\times\mathcal{T}_\sigma$, $\forall|\varepsilon|<\bar\varepsilon$ e $(p(\bar\varepsilon),q(\bar\varepsilon))\notin V_\rho\times\mathcal{T}_\sigma$.

Allora $\exists\eta$, $|\eta|<\bar\varepsilon$, tale che:

$$|p(\bar\varepsilon)-p|=|p(\bar\varepsilon)-p(0)|=|\dot p(\eta)\bar\varepsilon|=|\chi_q(p(\eta),q(\eta))|\,|\bar\varepsilon|<\rho-\rho' \tag{2.43}$$

per cui

$$|p(\bar\varepsilon)-\bar p|\le|p(\bar\varepsilon)-p|+|p-\bar p|<\rho-\rho'+\rho'=\rho \tag{2.44}$$

Analogamente $|q(\bar\varepsilon)-\bar q|<\sigma$. E ciò mostra $(p(\bar\varepsilon),q(\bar\varepsilon))\in V_\rho\times\mathcal{T}_\sigma$, contro l'ipotesi assurda. □

In effetti, con la stessa tecnica si può dimostrare un risultato più generale:

Proposizione 2.19 *Sia* $V\subseteq\mathbf{R}^N$. *Siano*

$$V_{\rho_1,\dots,\rho_N}\equiv\bigcup_{\bar z\in V}\{z\in\mathbf{C}^N \text{ tc } |z_i-\bar z|<\rho_i,\, i=1,\dots,N\}$$

$$\mathcal{T}_{\sigma_1,\dots,\sigma_N}\equiv\bigcup_{\bar z\in\mathbf{T}^N}\{z\in\mathbf{C}^N \text{ tc } |z_i-\bar z|<\sigma_i,\, i=1,\dots,N\}$$

Sia $\chi(p,q)$ *analitica su* $V_{\rho_1,\dots,\rho_N}\times\mathcal{T}_{\sigma_1,\dots,\sigma_N}$. *Fissati* $0<\rho_i'<\rho_i$ *e* $0<\sigma_i'<\sigma_i$, $1\le i\le N$, *sia* $\varepsilon_0>0$ *tale che*

$$\varepsilon_0\max_{1\le i\le N}\left\{\frac{\sup_{V_{\rho_1,\dots,\rho_N}\times\mathcal{T}_{\sigma_1,\dots,\sigma_N}}|\chi_{q_i}|}{\rho_i-\rho_i'}, \frac{\sup_{V_{\rho_1,\dots,\rho_N}\times\mathcal{T}_{\sigma_1,\dots,\sigma_N}}|\chi_{p_i}|}{\sigma_i-\sigma_i'}\right\}<1$$

Allora $\forall\varepsilon\in\mathbf{C}$, $|\varepsilon|\le\varepsilon_0$, *il flusso hamiltoniano* Φ_χ^ε *è analitico e*

$$\Phi_\chi^\varepsilon \;:\; V_{\rho_1',\dots,\rho_N'}\times\mathcal{T}_{\sigma_1',\dots,\sigma_N'}\longrightarrow V_{\rho_1,\dots,\rho_N}\times\mathcal{T}_{\sigma_1,\dots,\sigma_N}$$

Proposizione 2.20 *Siano $\chi, \rho, \rho', \sigma, \sigma', \varepsilon_0$ come nella Proposizione 2.18 e sia H analitica e limitata in $V_\rho \times \mathcal{T}_\sigma$. Allora $\forall k \geq 1$*

$$H \circ \Phi_\chi^\varepsilon = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\varepsilon^j}{j!} L_\chi^j H + \varepsilon^k R_k(p, q; \varepsilon) \tag{2.45}$$

con[14]

$$R_k(p, q; \varepsilon) = \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!} \frac{d^k}{ds^k} \left(H \circ \Phi_\chi^s \right)\Big|_{s=\varepsilon t} dt \tag{2.46}$$

$$\sup_{V_{\rho'} \times \mathcal{T}_{\sigma'}} |R_k| \leq \frac{\sup\limits_{V_\rho \times \mathcal{T}_\sigma} |H|}{(\varepsilon_0 - |\varepsilon|)^k} \qquad \forall |\varepsilon| < \varepsilon_0 \tag{2.47}$$

DIM. Sia $\mathcal{F}(\varepsilon) \equiv H(\Phi_\chi^\varepsilon(p, q))$. Con Taylor ho:

$$\mathcal{F}(\varepsilon) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\varepsilon^j}{j!} \frac{d^j \mathcal{F}}{d\varepsilon^j}(0) + \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!} \frac{d^k \mathcal{F}}{d\varepsilon^k}(t\varepsilon)\, \varepsilon^k \, dt \tag{2.48}$$

Affermo che:

$$\frac{d^m}{d\varepsilon^m} \left(H \circ \Phi_\chi^\varepsilon(p, q) \right) = L_\chi^m H \circ \Phi_\chi^\varepsilon(p, q) \tag{2.49}$$

Infatti, per induzione:

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left(H \circ \Phi_\chi^\varepsilon(p, q) \right) = H_q(\Phi_\chi^\varepsilon(p, q)) \chi_p(\Phi_\chi^\varepsilon(p, q)) - H_p(\Phi_\chi^\varepsilon(p, q)) \chi_q(\Phi_\chi^\varepsilon(p, q)) =$$

---

[14] La serie $\sum\limits_{j \geq 0} \frac{\varepsilon^j}{j!} L_\chi^j H$ è detta **serie di Lie**. Ho denotato

$$L_\chi H \equiv \{H, \chi\} \equiv \frac{d}{dt} H\left(\Phi_\chi^t(p, q)\right)\Big|_{t=0} = H_q \cdot \chi_p - H_p \cdot \chi_q$$

la **parentesi di Poisson** di H con χ.

La notazione L_χ^j indica l'operatore L_χ applicato j volte se $j \geq 1$, l'operatore identico se $j = 0$.

Si osservi che la serie di Lie è convergente per $|\varepsilon| < \varepsilon_0/2$, in quanto

$$|\varepsilon^k R_k| \leq \left(\frac{|\varepsilon|}{\varepsilon_0 - |\varepsilon|} \right)^k \sup_{V_\rho \times \mathcal{T}_\sigma} |H| \xrightarrow{k \to \infty} 0$$

Per una stima di $L_\chi^j H$ vd. Lemma G.3.

$$= \{H, \chi\} \circ \Phi_\chi^\varepsilon(p,q) = L_\chi H \circ \Phi_\chi^\varepsilon(p,q) \tag{2.50}$$

è la base dell'induzione. Il passo induttivo è cosí:

$$\frac{d^m}{d\varepsilon^m} H \circ \Phi_\chi^\varepsilon(p,q) = \frac{d^{m-1}}{d\varepsilon^{m-1}} \frac{d}{d\varepsilon} H \circ \Phi_\chi^\varepsilon(p,q) = \frac{d^{m-1}}{d\varepsilon^{m-1}} \Big(\{H, \chi\} \circ \Phi_\chi^\varepsilon(p,q) \Big) =$$

$$= L_\chi^{m-1} \{H, \chi\} \circ \Phi_\chi^\varepsilon(p,q) = L_\chi^{m-1} L_\chi H \circ \Phi_\chi^\varepsilon(p,q) = L_\chi^m H \circ \Phi_\chi^\varepsilon(p,q) \tag{2.51}$$

La (2.49) cosí dimostrata implica che

$$\frac{d^j \mathcal{F}}{d\varepsilon^j}(0) = \frac{d^j}{d\varepsilon^j} \, H \circ \Phi_\chi^\varepsilon(p,q) \Big|_{\varepsilon=0} = L_\chi^j \, H \circ \Phi_\chi^\varepsilon(p,q) \Big|_{\varepsilon=0} = L_\chi^j H(p,q) \tag{2.52}$$

La (2.48) e la (2.52) mi conducono a (2.45) e (2.46).

Per dimostrare la (2.47) si invoca la **Stima di Cauchy**: ricordando anche la Proposizione precedente si ha

$$\sup_{V_{\rho'} \times \mathcal{T}_{\sigma'}} |R_k| \leq \sup_{\substack{(p,q) \in V_{\rho'} \times \mathcal{T}_{\sigma'} \\ |s| \leq |\varepsilon|}} \left| \frac{d^k}{ds^k} \Big(H \circ \Phi_\chi^s \Big) \right| \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!} \, dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{k!} \cdot k! \cdot \frac{\sup\limits_{\substack{(p,q) \in V_{\rho'} \times \mathcal{T}_{\sigma'} \\ |s| \leq \varepsilon_0}} |H \circ \Phi_\chi^s(p,q)|}{(\varepsilon_0 - \varepsilon)^k} \leq \frac{\sup\limits_{(p,q) \in V_\rho \times \mathcal{T}_\sigma} |H(p,q)|}{(\varepsilon_0 - \varepsilon)^k} \qquad \square$$

Corollario 2.21 *Sotto le ipotesi della Proposizione precedente si ha che*

$$H \circ \Phi_\chi^\varepsilon = H \circ \Phi_{\varepsilon\chi}^1 = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\varepsilon^j}{j!} L_\chi^j H + \varepsilon^k R_k(p,q;\varepsilon)$$

DIM. Dalla Proposizione 2.17 ho che

$$\Phi_\chi^\varepsilon = \Phi_{\varepsilon\chi}^1 \tag{2.53}$$

La tesi segue quindi dalla Proposizione precedente. $\square$

Definizione 2.22 *La trasformazione* $(p,q) \longmapsto \Phi_\chi^\varepsilon(p,q) = \Phi_{\varepsilon\chi}^1(p,q)$ *è detta* **trasformazione di Lie**.

Con questa definizione, le Proposizioni 2.15 e 2.16 e si riassumono nel seguente

Teorema 2.23 *Le trasformazioni di Lie sono tutte e sole le trasformazioni canoniche vicine all'identità* $\Phi(p, q; \varepsilon)$ *verificanti la condizione*

$$\Phi\left(\Phi(p, q; \varepsilon_1); \varepsilon_2\right) = \Phi(p, q; \varepsilon_1 + \varepsilon_2) \tag{2.54}$$

Esse ammettono una funzione generatrice del tipo

$$\mathcal{G}(P, q; \varepsilon) = P \cdot q + \varepsilon \chi(P, q; \varepsilon)$$

Concludiamo con due formule riguardanti la derivata dell'operatore L_χ:

Proposizione 2.24 *Se denotiamo*

$$\begin{aligned} &\Lambda^j_\chi H \equiv \sum_{\substack{0 \le n, m \le j-1 \\ m+n=j-1}} L^n_\chi \, L_{\partial\chi} \, L^m_\chi H \\ &\Gamma^{j_1,\ldots,j_k}_{\chi_1,\ldots,\chi_k} H \equiv \Lambda^{j_1}_{\chi_1} \, L^{j_2}_{\chi_2} \ldots L^{j_k}_{\chi_k} H + \\ &+ L^{j_1}_{\chi_1} \, \Lambda^{j_2}_{\chi_2} \, L^{j_3}_{\chi_3} \ldots L^{j_k}_{\chi_k} H + L^{1_2}_{\chi_1} \ldots L^{j_{k-1}}_{\chi_{k-1}} \, \Lambda^{j_k}_{\chi_k} H \end{aligned}$$

dove il simbolo ∂ *indica la derivata rispetto a una variabile fissata, e* H, χ, $\chi_1, \ldots, \chi_k$ *sono funzioni regolari, si ha:*

$$\partial\left(L^j_\chi H\right) = L^j_\chi \left(\partial H\right) + \Lambda^j_\chi H \tag{2.55}$$

$$\partial\left(L^{j_1}_{\chi_1} \ldots L^{j_k}_{\chi_k} H\right) = L^{j_1}_{\chi_1} \ldots L^{j_k}_{\chi_k} \left(\partial H\right) + \Gamma^{j_1,\ldots,j_k}_{\chi_1,\ldots,\chi_k} H \tag{2.56}$$

DIM. La (2.55) si verifica per induzione su j. La (2.56) per induzione su k, essendo la (2.55) la base per tale induzione. □

3 Disuguaglianze diofantine

Definizione 3.1 *Un vettore $\omega \in \mathbf{R}^N$ si dice (γ,τ)-***diofantino** *se*

$$|\omega \cdot n| \geq \frac{\gamma}{|n|^\tau} \qquad\qquad \forall n \in \mathbf{Z}^N - \{0\}$$

Proposizione 3.2 *Se $\tau > N-1$ i vettori diofantini hanno misura piena: se*

$$\mathcal{D} \equiv \{\omega \in \mathbf{R}^N \ \text{ tc } \ \exists \gamma \ \text{ tc } \ |\omega \cdot n| \geq \frac{\gamma}{|n|^\tau}\}$$

si ha

$$\text{mis } \mathcal{D}^C = 0$$

DIM. Sia $\mathcal{D}_R^C \equiv \mathcal{D}^C \cap B_R(0)$. Si ha $\mathcal{D}_R^C = \bigcap_{\gamma>0} A_{R,\gamma}$, con

$$A_{R,\gamma} \equiv \{\omega \in B_R(0) \ \text{ tc } \ \exists n \in \mathbf{Z}^N - \{0\} \ \text{ tc } \ |\omega \cdot n| < \frac{\gamma}{|n|^\tau}\}$$

Si ha

$$A_{R,\gamma} = \bigcup_{n \in \mathbf{Z}^N - \{0\}} \{\omega \in B_R(0) \ \text{ tc } \ |\omega \cdot n| < \frac{\gamma}{|n|^\tau}\}$$

e[1] poichè

$$\text{mis } \{\omega \in B_R(0) \ \text{ tc } \ |\omega \cdot n| < \frac{\gamma}{|n|^\tau}\} < 2c\frac{\gamma}{|n|^{\tau+1}}(2R)^{N-1}$$

si ottiene mis $(A_{R,\gamma}) < \bar{c}\gamma$ per cui, per ogni fissato $\gamma > 0$:

$$\text{mis } \mathcal{D}_R^C \leq \text{mis } (A_{R,\gamma}) < \tilde{c}\gamma$$

e, mandando γ a 0, ho mis $\mathcal{D}_R^C = 0$. Poichè

$$\mathcal{D}^C = \bigcup_{\substack{R>0 \\ R \in \mathbf{Q}}} \mathcal{D}_R^C$$

si ha che $\mathcal{D}^C$ è unione numerabile di insiemi di misura nulla. $\square$

Il risultato precedente può essere meglio specificato, nel senso che se $\tau < N-1$ non si hanno più vettori diofantini:

[1] Questo mostra anche che $A_{R,\gamma}$ è misurabile, perchè unione di aperti.

Lemma 3.3 *$\forall \alpha \in \mathbf{R}^d$, $d \geq 1$, $\forall Q \in \mathbf{N}$, $\exists (q,p) \in \mathbf{Z}^d \times \mathbf{Z} - \{0\}$ con*

$$|p| \leq 1 + |\alpha|\,|q|_\infty \qquad\qquad |q|_\infty \leq Q$$

cosí che

$$|\alpha \cdot q + p| \leq \frac{1}{Q^d}$$

In particolare $|\alpha \cdot q + p| \leq \dfrac{1}{|q|_\infty^d}$

DIM. Sia[2]

$$I_Q \equiv \{\alpha \cdot r - [\alpha \cdot r],\ 1 \leq r_i \leq Q\} \cup \{0\}$$

Si ha $\# I_Q = Q^d + 1$ e $I_Q \subset [0,1]$. Dividiamo $[0,1]$ in Q^d intervalli di lunghezza Q^{-d}. Per il Principio delle gabbie dei piccioni esiste almeno un intervallo che contiene almeno due punti di I_Q:

$$|\alpha \cdot r^{(1)} - [\alpha \cdot r^{(1)}] - \alpha \cdot r^{(2)} + [\alpha \cdot r^{(2)}]| \leq \frac{1}{Q^d}$$

cioè[3], ponendo $q \equiv r^{(1)} - r^{(2)}$ e $p \equiv [\alpha \cdot r^{(2)}] - [\alpha \cdot r^{(1)}]$:

$$|\alpha \cdot q - p| \leq \frac{1}{Q^d}$$

Certo $|q|_\infty = \sup\limits_{1 \leq i \leq d} |r_i^{(1)} - r_i^{(2)}| \leq Q$ e

$$|p| = |[\alpha \cdot r^{(2)}] - [\alpha \cdot r^{(1)}]| \leq |\alpha \cdot r^{(2)} - \alpha \cdot r^{(1)}| + 1 \leq$$

$$\leq |\alpha|\,|r^{(2)} - r^{(1)}|_\infty + 1 = |\alpha|\,|q|_\infty + 1 \qquad \square$$

Proposizione 3.4 (Liouville) *$\forall N \geq 2$ $\exists c > 0$ tale che $\forall \omega \in \mathbf{R}^N$*

$$|\omega \cdot n| \leq \frac{|\omega|_\infty\, c}{|n|^{N-1}}$$

per infiniti $n \in \mathbf{Z}^N - \{0\}$.

---

[2]In questa circostanza $[\cdot]$ indica la "parte intera".

[3]Eventualmente uno tra $r^{(1)}$ e $r^{(2)}$ può essere 0, nel caso che l'intervallo in questione sia quello contenente lo 0 ...

DIM. Assumiamo, a meno di cambiare ordine alle componenti di ω, che $|\omega|_\infty = |\omega_N|$. Applicando il Lemma precedente (con $d = N-1$, $\alpha = \left(\frac{\omega_1}{\omega_N}, \ldots, \frac{\omega_{N-1}}{\omega_N}\right)$, $q = (n_1, \ldots, n_{N-1})$ e $p = n_N$):

$$|\omega \cdot n| = |\omega_N||\alpha \cdot (n_1, \ldots, n_{N-1}) + n_N| = |\omega|_\infty \, |\alpha \cdot q + p| \leq \frac{|\omega|_\infty}{Q^d} \tag{3.1}$$

per opportuni p e q.

Poichè

$$|p|_\infty \leq |p| \leq 1 + |\alpha| \, |q|_\infty \leq 1 + |\alpha| \, Q \leq 1 + dQ$$

(essendo $|\alpha_i| \leq 1$, $i = 1, \ldots, N-1$ per costruzione), si ha:

$$|n|_\infty = |(q,p)|_\infty \leq |q|_\infty + |p|_\infty \leq Q + 1 + dQ \leq (2+d)Q$$

che sostituito nella (3.1) porta a

$$|\omega \cdot n| \leq \frac{|\omega|_\infty}{|n|_\infty^d}(d+2)^d \leq \frac{|\omega|_\infty}{|n|^d} N^d (d+2)^d$$

Di tali (q,p) ne esistono infiniti: supponiamo ω razionalmente indipendente e sia

$$\mathcal{E} \equiv \bigcup_{Q \in \mathbf{N}} \{(q,p) \ \text{ tc } \ |\alpha \cdot q - p| < \frac{1}{Q^d} \ \text{ con } \ |p| \leq 1 + |\alpha| \, |q|_\infty \ \text{ e } \ |q|_\infty \leq Q\}$$

se P.A. fosse $\#\mathcal{E} < \infty$, si avrebbe

$$\min_{(q,p) \in \mathcal{E}} |\alpha \cdot q - p| > 0$$

poichè tale minimo è fatto su un numero finito di numeri positivi, essendo ω razionalmente indipendente.

D'altra parte, per costruzione, $\min_{(q,p) \in \mathcal{E}} |\alpha \cdot q - p| < \frac{1}{Q^d}$, $\forall Q \in \mathbf{N}$, ovvero, mandando Q all'infinito $\min_{(q,p) \in \mathcal{E}} |\alpha \cdot q - p| = 0$: contraddizione.

Se invece ω è razionalmente dipendente si ha $\omega \cdot \bar{n} = 0$, per cui $\forall n \in \{m\bar{n}, m \in \mathbf{Z}\}$ si ha

$$|\omega \cdot n| = 0 < \frac{|\omega|_\infty \, c}{|n|^{N-1}}$$

□

Nel caso $N = 2$, il problema è ridotto all'approssimazione razionale degli irrazionali:

Definizione 3.5 *Due numeri reali x e y sono detti equivalenti se $\exists a,b,c,d \in$ $\mathbf{Z}$ con $ad-bc=\pm 1$ in modo che $x = \dfrac{ay+b}{cy+d}$*

Il seguente risultato è un classico: per la dimostrazione cfr. [HW], pagg. 129-177.

Teorema 3.6 *Ogni numero irrazionale x è razionalmente approssimato da frazioni continue*

$$\frac{p_n}{q_n} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots \cfrac{1}{a_n}}}}$$

Tale approssimazione avviene alternativamente da destra e da sinistra, cioè

$$q_n x - p_n = \frac{(-1)^n\,\delta_n}{q_{n+1}} \tag{I}$$

con $\delta_n \in (0,1)$ e δ_n/q_{n+1} decrescente. In particolare

$$|x - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{q_n^2} \tag{II}$$

L'approssimazione via frazioni continue è la migliore, nel senso che, se $q \le q_n$ e $p/q \neq p_n/q_n$, si ha

$$|x - \frac{p_n}{q_n}| < |x - \frac{p}{q}| \tag{III}$$

Di più, esistono infiniti $(q,p) \in \mathbf{Z}^2$ tali che

$$|x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{\sqrt{5}\,q^2} \tag{IV}$$

e di tre consecutive frazioni continue approssimanti x una almeno soddisfa (IV)*.*

La (IV) *è ottimale. Tuttavia, può essere migliorata per i numeri "non troppo irrazionali": cioè se x non è equivalente al numero aureo esistono infiniti $(q,p) \in \mathbf{Z}^2$ tali che*

$$|x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{2\sqrt{2}\,q^2} \tag{V}$$

Un'applicazione di queste disuguaglianze diofantine è data nell'Appendice C in cui esibisco un esempio di una serie di funzioni convergente quasi ovunque, ma divergente su un insieme denso.

4 Il teorema della media di Birkhoff

Nei sistemi dinamici il concetto di stabilità compare sotto diversi punti di vista: stabilità di un equilibrio, stabilità strutturale, ecc...[1] In queste pagine mi occuperò della **stabilità delle variabili di azione**: ovvero per quanto tempo l'azione $I(t)$ resta "vicino" all'azione iniziale I_0. Il primo risultato è questo semplice

Lemma 4.1 (Stabilità per tempi finiti) *Siano a, b funzioni vettoriali regolari su $D_r(I_0) \times \mathbf{T}^N$.*

$$\dot{I} = \varepsilon a(I, \varphi)$$

$$\dot{\varphi} = \omega(I) + \varepsilon b(I, \varphi)$$

Allora $\forall \alpha \in [0, 1]$

$$|I(t) - I(0)| < \varepsilon^\alpha r$$

$$\forall t < \frac{r}{A\varepsilon^{1-\alpha}}$$

con $A \equiv \sup_{|I-I(0)| \leq r} |a(I, \varphi)|$.

Analogamente a questa stima sulle variabili di azione se ne ottiene una sul sollevamento degli angoli:

$$|\varphi(t) - \varphi(0) - \omega(I(0))t| < (K\varepsilon^\alpha r + \varepsilon B)t$$

essendo $B \equiv \sup_{|I-I(0)| \leq r} |b(I, \varphi)|$ e $K \equiv \sup_{|I-I(0)| \leq r} |\omega'(I)|$.

DIM. P.A. Sia $t_0 < \frac{r}{A\varepsilon^{1-\alpha}}$ tale che $|I(t) - I(0)| < \varepsilon^\alpha r$, $\forall t < t_0$ e $|I(t_0) - I(0)| = \varepsilon^\alpha r$. Allora:

$$\varepsilon^\alpha r = |I(t_0) - I(0)| = |\int_0^{t_0} \dot{I}(s)\, ds| =$$

$$= \varepsilon |\int_0^{t_0} a(I(s), \varphi(s))\, ds| \leq \varepsilon t_0 A < \varepsilon^\alpha r \qquad \square$$

[1] "Su gran parte della superficie terrestre il margine di sicurezza non supera i 15 gradi e in alcune zone è molto minore.

Basterebbe un aumento di 20-25 gradi per mettere in serio pericolo tutta la specie umana."

(Fred Hoyle - *La nuvola nera*)

Corollario 4.2 *Data l'hamiltoniana $H(I,\varphi) = h(I) + \varepsilon f(I,\varphi)$, con h e f regolari su $D_r(I_0) \times \mathbf{T}^N$; allora $\forall \alpha \in [0,1]$,*

$$\forall t < \frac{r}{\sup\limits_{\substack{|I-I(0)|\le r \\ \varphi\in\mathbf{T}^N}} |\partial_\varphi f(I,\varphi)| \cdot \varepsilon^{1-\alpha}}$$

$$|I(t) - I(0)| < \varepsilon^\alpha r$$

Per "allungare" i tempi nei risultati di stabilità si può passare per il

Teorema 4.3 (Teorema della media) [2] *Consideriamo l'hamiltoniana*

$$H(I,\varphi) = h(I) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n f_n(I,\varphi)$$

con f_n polinomi trigonometrici di grado p_n e $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$ con ε_0 opportunamente piccolo. Fissato un intero k, supponiamo che $\omega_0 \equiv h'(I_0)$ sia non risonante fino all'ordine $k\, p_1 + (k-1)\max\{p_2, \ldots, p_k\}$.

Allora esiste una trasformazione canonica Φ_k vicina all'identità[3] *tale che, denotata $\mathcal{H} \equiv H \circ \Phi_k$ la nuova hamiltoniana nelle nuove variabili (y,x), si ottiene:*

$$\mathcal{H}(y,x) = h(y) + \sum_{j=1}^{k} \varepsilon^j g_j(y) + O(\varepsilon^{k+1})$$

Più precisamente: Φ_k è ottenuta dalla funzione generatrice

$$\mathcal{G}(y,\varphi) = y \cdot \varphi + \sum_{j=1}^{k} \varepsilon^j \chi_j$$

dove

$$\chi_1(y,\varphi) = \sum_{\substack{n\in\mathbf{Z}^N \\ 0<|n|\le p_1}} \frac{i(\hat{f}_1)_n(y)}{\omega \cdot n} e^{in\cdot\varphi}$$

[2] Il nome "teorema della media" è dovuto al seguente Teorema 4.6, in cui $\hat{f}_0$ è la media di f.

[3] Tale trasformazione canonica è locale nelle variabili di azione, ma globale negli angoli.

e ricorsivamente[4]*:*

$$\chi_d(y,\varphi) = \sum_{\substack{n\in\mathbf{Z}^N \\ 0<|n|\le d\, p_1+(d-1)\max\{p_2,\dots,p_d\}}} \frac{i\,(\hat{\Gamma}_d)_n}{n\cdot\omega} e^{in\cdot\varphi}$$

dove

$$\Gamma_d(y,\varphi;\varepsilon) \equiv [h(y+\sum_{j=1}^{d-1}\varepsilon^j\partial_\varphi\chi_j)]_d + \sum_{n=1}^{d}[f_n(y+\sum_{j=1}^{d-n}\varepsilon^j\partial_\varphi\chi_j,\varphi)]_{d-n}$$

purchè ε_0 sia abbastanza piccolo da verificare

$$\sum_{j=1}^{k}\varepsilon_0^j \sup_{\varphi\in\mathbf{T}^n}|\frac{\partial^2\chi_j(y_0,\varphi)}{\partial y\partial\varphi}| < 1$$

DIM. Consideriamo la funzione generatrice

$$\mathcal{G}(y,\varphi) = y\cdot\varphi + \sum_{j=1}^{k}\varepsilon^j\chi_j$$

di cui determinerò ricorsivamente χ_j:

$$I = y + \sum_{j=1}^{k}\varepsilon^j\partial_\varphi\chi_j$$

$$x = \varphi + \sum_{j=1}^{k}\varepsilon^j\partial_y\chi_j$$

Impongo che

$$\mathcal{H} = H\circ\Phi_k = h(y+\sum_{j=1}^{k}\varepsilon^j\partial_\varphi\chi_j)+\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n f_n(y+\sum_{j=1}^{k}\varepsilon^j\partial_\varphi\chi_j,\varphi) \equiv h(y)+\sum_{j=1}^{k}\varepsilon^j g_j(y)+O(\varepsilon^{k+1})$$

Osservando che:

[4]Definendo l'"ordine d":

$$[\sum_{j\ge 0}\lambda_j\varepsilon^j]_d \equiv \lambda_d$$

- $[F(b+\sum_{j\geq 1}\varepsilon^j a_j)]_d = [F(b+\sum_{j=1}^d \varepsilon^j a_j)]_d$
- $[\varepsilon^n F(\varepsilon)]_d = [F(\varepsilon)]_{d-n}$

si ottiene:

$$[h(y+\sum_{j=1}^{d}\varepsilon^j\partial_\varphi\chi_j)]_d + \sum_{n=1}^{d}[f_n(y+\sum_{j=1}^{d-n}\varepsilon^j\partial_\varphi\chi_j,\varphi)]_{d-n} \equiv g_d(y)$$

da cui, poichè $[F(y+\sum_{j=1}^d \varepsilon^j a_j)]_d = F'(y)\cdot a_d + [F(y+\sum_{j=1}^{d-1}\varepsilon^j a_j)]_d$:

$$h'(y)\cdot\partial_\varphi\chi_d + [h(y+\sum_{j=1}^{d-1}\varepsilon^j\partial_\varphi\chi_j)]_d + \sum_{n=1}^{d}[f_n(y+\sum_{j=1}^{d-n}\varepsilon^j\partial_\varphi\chi_j,\varphi)]_{d-n} \equiv g_d(y)$$

che permette di trovare $\partial_\varphi\chi_d$ in funzione di $\partial_\varphi\chi_j, 1\leq j\leq d-1$: infatti siano $\omega=\omega(y)\equiv h'(y)$ e

$$\Gamma_d(y,\varphi;\varepsilon) \equiv [h(y+\sum_{j=1}^{d-1}\varepsilon^j\partial_\varphi\chi_j)]_d + \sum_{n=1}^{d}[f_n(y+\sum_{j=1}^{d-n}\varepsilon^j\partial_\varphi\chi_j,\varphi)]_{d-n}$$

Supponendo note, per induzione, $\partial_\varphi\chi_j, 1\leq j\leq d-1$ è nota di conseguenza Γ; determino $\partial_\varphi\chi_d$ e g_d. Sviluppando in serie di Fourier:

$$\Gamma_d = \sum_{n\in\mathbf{Z}^N}(\hat{\Gamma}_d)_n e^{in\cdot\varphi}$$

$$\chi_d = \sum_{\substack{n\in\mathbf{Z}^N\\ n\neq 0}}(\hat{\chi}_d)_n e^{in\cdot\varphi}$$

e allora

$$\sum_{\substack{n\in\mathbf{Z}^N\\ n\neq 0}}(\hat{\chi}_d)_n in\cdot\omega e^{in\cdot\varphi} + (\hat{\Gamma}_d)_0 + \sum_{\substack{n\in\mathbf{Z}^N\\ n\neq 0}}(\hat{\Gamma}_d)_n e^{in\cdot\varphi} = g_d$$

da cui $g_d(y) = (\hat{\Gamma}_d)_0$ e $(\hat{\chi}_d)_n = \dfrac{i(\hat{\Gamma}_d)_n}{n\cdot\omega}$, ovvero

$$\chi_d(y,\varphi) = \sum_{\substack{n\in\mathbf{Z}^N\\ n\neq 0}}\frac{i(\hat{\Gamma}_d)_n}{n\cdot\omega}e^{in\cdot\varphi}$$

Devo verificare che:

1. $(\hat{\Gamma_d})_n = 0$ per $|n| \gg 0$, cioè la serie che definisce χ_d è in realtà una somma finita, per cui non ho problemi di convergenza.

2. posso trovare direttamente χ_1 (base dell' induzione).

3. Φ_k è una trasformazione globale negli angoli.

1. $\Gamma_1(y,\varphi) \equiv [h(y)]_1 + [f_1(y,\varphi)]_0 = f_1(y,\varphi)$, per cui $(\hat{\Gamma_1})_n = (\hat{f_1})_n = 0$ se $|n| > p_1$. Per induzione: affermo che $\forall d\, \exists n^{(d)} \in \mathbf{N}$ tale che, se $|n| > n^{(d)}$, $(\hat{\Gamma_d})_n = 0$. L'ipotesi induttiva è che $\forall j \leq d-1\, \exists n_j \in \mathbf{N}$ tale che, se $|n| > n_j$, $(\hat{\Gamma_j})_n = 0$. Sia $\nu \equiv \max n_j$, in modo che, se $|n| > \nu$, $(\hat{\Gamma_j})_n = 0, \forall j \leq d-1$. Per la costruzione di χ_j in funzione delle $(\hat{\Gamma_j})_n$, ho che χ_j è un polinomio trigonometrico di grado non superiore a ν.

   E allora, poichè, usando il tensore delle derivate di Taylor, si vede[5] che

$$[\frac{\partial^s h(y)}{s!} \cdot (\sum_{j=1}^{d-1} \varepsilon^j \partial_\varphi \chi_j)^s]_d = \sum_{\substack{j_1+\ldots+j_s=d \\ j_1,\ldots,j_s \geq 1}} \frac{\partial^s h(y)}{s!} \cdot \partial_\varphi \chi_{j_1} \cdot \ldots \cdot \partial_\varphi \chi_{j_s},$$

   ottengo:

$$\Gamma_d \;=\; [h(y + \sum_{j=1}^{d-1} \varepsilon^j \partial_\varphi \chi_j)]_d + \sum_{n=1}^{d-1} [f_n(y + \sum_{j=1}^{d-n} \varepsilon^j \partial_\varphi \chi_j, \varphi)]_{d-n} +$$

[5]Infatti:

$$\begin{aligned}
\partial^s h(y) \cdot (\sum_{j=1}^{d-1} \varepsilon^j \partial_\varphi \chi_j)^s &= \sum_{0 \leq l_1,\ldots,l_s \leq N} \frac{\partial^s h(y)}{\partial y_{l_1} \ldots \partial y_{l_s}} \cdot (\sum_{j_1=1}^{d-1} \varepsilon^{j_1} \partial_{\varphi_{l_1}} \chi_{j_1}) \cdot \ldots \cdot (\sum_{j_s=1}^{d-1} \varepsilon^{j_s} \partial_{\varphi_{l_s}} \chi_{j_s}) = \\
&= \sum_{\substack{0 \leq l_1,\ldots,l_s \leq N \\ 1 \leq j_1,\ldots,j_s \leq d-1}} \frac{\partial^s h(y)}{\partial y_{l_1} \ldots \partial y_{l_s}} \varepsilon^{j_1+\ldots+j_s} \cdot \partial_{\varphi_{l_1}} \chi_{j_1} \cdot \ldots \cdot \partial_{\varphi_{l_s}} \chi_{j_s}
\end{aligned}$$

mostra che

$$\begin{aligned}
[\frac{\partial^s h(y)}{s!} \cdot (\sum_{j=1}^{d-1} \varepsilon^j \partial_\varphi \chi_j)^s]_d &= \sum_{\substack{0 \leq l_1,\ldots,l_s \leq N \\ 1 \leq j_1,\ldots,j_s \leq d-1 \\ j_1+\ldots+j_s=d}} \frac{1}{s!} \frac{\partial^s h(y)}{\partial y_{l_1} \ldots \partial y_{l_s}} \cdot \partial_{\varphi_{l_1}} \chi_{j_1} \cdot \ldots \cdot \partial_{\varphi_{l_s}} \chi_{j_s} = \\
&= \sum_{\substack{j_1+\ldots+j_s=d \\ j_1,\ldots,j_s \geq 1}} \frac{\partial^s h(y)}{s!} \cdot \partial_\varphi \chi_{j_1} \cdot \ldots \cdot \partial_\varphi \chi_{j_s}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
+ &\quad [f_d(y,\varphi)]_0 = \\
= &\quad [\sum_{s\geq 0} \frac{\partial^s h(y)}{s!} \cdot (\sum_{j=1}^{d-1} \varepsilon^j \partial_\varphi \chi_j)^s]_d + \\
+ &\quad \sum_{n=1}^{d-1} [\sum_{s\geq 0} \frac{\partial^s f_n(y,\varphi)}{s!} \cdot (\sum_{j=1}^{d-n} \varepsilon^j \partial_\varphi \chi_j)^s]_{d-n} + f_d(y,\varphi) = \\
= &\quad \sum_{s\geq 2} \sum_{\substack{j_1+\ldots+j_s=d \\ 1\leq j_1,\ldots,j_s\leq d-1}} \frac{\partial^s h(y)}{s!} \cdot \partial_\varphi \chi_{j_1} \cdot \ldots \cdot \partial_\varphi \chi_{j_s} + \\
+ &\quad \sum_{n=1}^{d-1} \sum_{s\geq 1} \sum_{\substack{j_1+\ldots+j_s=d-n \\ 1\leq j_1,\ldots,j_s\leq d-n}} \frac{\partial^s f_n(y,\varphi)}{s!} \cdot \partial_\varphi \chi_{j_1} \cdot \ldots \cdot \partial_\varphi \chi_{j_s} + f_d(y,\varphi)
\end{aligned}
$$

Quindi Γ_d è ottenuto[6] moltiplicando e sommando polinomi trigonometrici; perciò è esso stesso un polinomio trigonometrico. Di più: affermo che $\deg \Gamma_d \leq d\, p_1 + (d-1) \max\{p_1, \ldots, p_d\}$. Infatti, per induzione: dalla relazione ora trovata per Γ_d segue che[7]

$$
\begin{aligned}
\deg \Gamma_d &\leq \max\{ \max_{\substack{j_1+\ldots+j_s=d \\ 1\leq j_1,\ldots,j_s\leq d-1 \\ s\geq 2}} \deg \Gamma_{j_1} + \ldots + \deg \Gamma_{j_s}, \\
&\qquad \max_{\substack{j_1+\ldots+j_s=d-n \\ 1\leq j_1,\ldots,j_s\leq d-n \\ s\geq 1}} \pi + \deg \Gamma_{j_1} + \ldots + \deg \Gamma_{j_s} \} \leq \\
&\leq \max\{ dp_1 + \max_{s\geq 2} (d-s)\pi, (d-n)p_1 + \max_{s\geq 1} (d-n-s+1)\pi \} \leq \\
&\leq dp_1 + (d-1)\pi
\end{aligned}
$$

avendo denotato per brevità $\pi = \pi(d) \equiv \max\{p_1, \ldots, p_d\}$.

2. Prendendo l' "ordine 1":

$$g_1(y) = [h(y + \varepsilon \partial_\varphi \chi_1)]_1 + [f_1(y,\varphi)]_0 = \omega \cdot \partial_\varphi \chi_1 + f_1(y,\varphi)$$

da cui, se

$$f_1(y,\varphi) = \sum_{n\in \mathbf{Z}^N} (\hat{f}_1)_n(y) e^{in\cdot\varphi}$$

[6] Notare che se $j_1 + \ldots + j_s = d$ e $j_1, \ldots, j_s \geq 1$ deve essere $s \leq d$. Per cui le serie sono in realtà somme finite.

[7] Si noti che per costruzione $\deg \Gamma_d = \deg \chi_d$.

$$\chi_1(y,\varphi) = \sum_{\substack{n\in\mathbf{Z}^N\\ n\neq 0}} (\hat{\chi}_1)_n(y)e^{in\cdot\varphi}$$

ho:

$$g_1 = \sum_{\substack{n\in\mathbf{Z}^N\\ n\neq 0}} (\hat{\chi}_1)_n(y)i\omega\cdot ne^{in\cdot\varphi} + \sum_{n\in\mathbf{Z}^N} (\hat{f}_1)_n(y)e^{in\cdot\varphi}$$

da cui $g_1 = (\hat{f}_1)_0(y)$ e $(\hat{\chi}_1)_n(y) = \dfrac{i(\hat{f}_1)_n(y)}{\omega\cdot n}$, ovvero:

$$\chi_1(y,\varphi) = \sum_{\substack{n\in\mathbf{Z}^N\\ n\neq 0}} \frac{i(\hat{f}_1)_n(y)}{\omega\cdot n}e^{in\cdot\varphi}$$

3. Dal **Teorema del Dini per perturbazioni dell' identità** (*se* $|G'|_{\mathbf{T}^N} <$ 1 *allora* $\varphi \longmapsto \varphi + G(\varphi)$ *è un diffeomorfismo*[8]), applicato a $G(\varphi) \equiv \sum_{j=1}^{k}\varepsilon^j\partial_y\chi_j(y_0,\varphi)$, ho che la trasformazione canonica è un diffeomorfismo nelle vicinanze di y_0, purchè $\sup_{\varphi\in\mathbf{T}^N}|\sum_{j=1}^{k}\varepsilon^j\frac{\partial^2\chi_j(y_0,\varphi)}{\partial y\partial\varphi}| < 1$; è allora sufficiente che:

$$\sum_{j=1}^{k}\varepsilon_0^j \sup_{\varphi\in\mathbf{T}^n}|\frac{\partial^2\chi_j(y_0,\varphi)}{\partial y\partial\varphi}| < 1 \qquad \square$$

Corollario 4.4 *Consideriamo l'hamiltoniana*

$$H(I,\varphi) = h(I) + \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n f_n(I,\varphi)$$

nelle stesse ipotesi del Teorema precedente e sia $\alpha\in[0,k+1]$. *Allora*[9] $\exists\mu,\gamma$ *tali che, se*

$$t < \frac{\mu}{\varepsilon^{k+1-\alpha}}$$

si ha $|I(t)-I(0)| < \gamma\varepsilon^\alpha$.

[8]La cui dimostrazione è: $\forall\psi\in\mathbf{T}^N$, sia $C_\psi(\varphi)\equiv\psi - G(\varphi)$. Essendo C_ψ una contrazione, $\exists!\varphi\in\mathbf{T}^N$ tale che $C_\psi(\varphi)=\varphi$, ovvero $\psi=\varphi+G(\varphi)$.

[9]Notare l' “allungamento” dei tempi rispetto al Corollario precedente.

DIM. Dalla nuova hamiltoniana

$$\mathcal{H}(y,x) = h(y) + \sum_{j=1}^{k} \varepsilon^j g_j(y) + O(\varepsilon^{k+1})$$

tramite il Lemma della stabilità per tempi finiti ottengo che, per tutti i tempi fino all'ordine $\varepsilon^{-k-1+\alpha}$, $|y(t) - y(0)| = O(\varepsilon^\alpha)$. Perciò, essendo la trasformazione canonica vicino all'identità, $|I(t) - I(0)| \leq |I(t) - y(t)| + |y(t) - y(0)| + |y(0) - I(0)| = O(\varepsilon^\alpha) + 2O(\varepsilon) = O(\varepsilon^\alpha)$. □

Dal Teorema 4.3 otteniamo in particolare i seguenti:

Teorema 4.5 *Consideriamo l'hamiltoniana*

$$H(I,\varphi) = h(I) + \varepsilon f(I,\varphi)$$

con f polinomio trigonometrico di grado P e $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ con ε_0 opportunamente piccolo. Fissato un intero k, supponiamo che $\omega_0 \equiv h'(I_0)$ sia non risonante fino all'ordine kP.

Allora esiste una trasformazione canonica Φ_k vicina all'identità, locale nelle variabili di azione, ma globale negli angoli, tale che, denotata $\mathcal{H} \equiv H \circ \Phi_k$ la nuova hamiltoniana nelle nuove variabili (y,x), si ottiene:

$$\mathcal{H}(y,x) = h(y) + \sum_{j=1}^{k} \varepsilon^j g_j(y) + O(\varepsilon^{k+1})$$

Più precisamente: Φ_k è ottenuta dalla funzione generatrice

$$\mathcal{G}(y,\varphi) = y \cdot \varphi + \sum_{j=1}^{k} \varepsilon^j \chi_j$$

dove

$$\chi_1(y,\varphi) = \sum_{\substack{n \in \mathbf{Z}^N \\ 0<|n|\leq P}} \frac{i(\hat{f})_n(y)}{\omega \cdot n} e^{in\cdot\varphi}$$

e ricorsivamente:

$$\chi_d(y,\varphi) = \sum_{\substack{n \in \mathbf{Z}^N \\ 0<|n|\leq d\,P}} \frac{i\left([h(y + \sum_{j=1}^{d-1} \varepsilon^j \partial_\varphi \chi_j)]_d + [f(y + \sum_{j=1}^{d-1} \varepsilon^j \partial_\varphi \chi_j, \varphi)]_{d-1}\right)\widehat{}_n}{n \cdot \omega} e^{in\cdot\varphi}$$

Teorema 4.6 *Consideriamo l'hamiltoniana*

$$H(I,\varphi) = h(I) + \varepsilon f(I,\varphi)$$

con f polinomio trigonometrico di grado P e $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ con ε_0 opportunamente piccolo. Supponiamo che $\omega_0 \equiv h'(I_0)$ sia non risonante fino all'ordine P.

Allora esiste una trasformazione canonica Φ vicina all'identità, locale nelle variabili di azione, ma globale negli angoli, tale che, denotata $\mathcal{H} \equiv H \circ \Phi$ la nuova hamiltoniana nelle nuove variabili (y,x), si ottiene:

$$\mathcal{H}(y,x) = h(y) + \varepsilon \hat{f}_0 + O(\varepsilon^2)$$

L'intuizione fisica che supporta questi risultati è la seguente: l'equazione del moto suggerisce che le coordinate di azione varino *lentamente* nel tempo, mentre gli angoli varino *velocemente*. In questo modo si può pensare di sostituire alla perturbazione la sua media nelle coordinate veloci.

Il principio della media si incontra già in Gauss, che propose, per lo studio delle perturbazioni reciproche tra pianeti, di distribuire la massa di ogni pianeta sulla sua orbita e di sostituire l'attrazione dei pianeti con l'attrazione degli anelli cosí ottenuti. Tecniche di questo tipo furono usate anche da Lagrange e da Laplace, tanto che il principio di media, nelle sue varianti, è diventato uno strumento tradizionale nello studio della meccanica celeste.

Osservazioni.

(i) Il Teorema della media si può estendere dai polinomi trigonometrici a tutte le **funzioni periodiche**:

Consideriamo l'hamiltoniana

$$H(I,\varphi) = h(I) + \varepsilon f(I,\varphi)$$

con $f \in C^\infty(\{|I - I_0| \leq \rho\} \times \mathbf{T}^N)$, $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ e ε_0 opportunamente piccolo. Supponiamo che $\omega_0 \equiv h'(I_0)$ sia un vettore diofantino.

Fissato un intero k, esiste una trasformazione canonica Φ_k vicina all'identità tale che, denotata $\mathcal{H} \equiv H \circ \Phi_k$ la nuova hamiltoniana nelle nuove variabili (y,x), si ottiene:

$$\mathcal{H}(y,x) = h(y) + \sum_{j=1}^{k} \varepsilon^j g_j(y) + O(\varepsilon^{k+1})$$

Infatti basterà fissare un intero p in modo che $\sum_{n\in\mathbf{Z}^N} |\hat{f}_n|_{C^1}|n| < \varepsilon^k$: denotando $f_{(p)} \equiv \sum_{|n|\le p} \hat{f}_n(I)e^{in\cdot\varphi}$ e $R_{(p)} \equiv \sum_{|n|>p} \hat{f}_n(I)e^{in\cdot\varphi}$ ho

$$H(I,\varphi) = h(I) + \varepsilon f_{(p)}(I,\varphi) + O(\varepsilon^{k+1})$$

e ora applico l'algoritmo del teorema della media al polinomio trigonometrico $f_{(p)}$.

(ii) Nel teorema della media si potrebbe essere tentati di "mandare k all'infinito": formalmente otterremmo una funzione generatrice[10]

$$\mathcal{G}(y,\varphi) = y\cdot\varphi + \sum_{j\ge 1} \varepsilon^j \chi_j$$

che ci conduce alla nuova hamiltoniana $\mathcal{H}(y) = \sum_{j\ge 0} \varepsilon^j g_j(y)$. Se questo procedimento fosse convergente, la nuova hamiltoniana sarebbe integrabile e otterremmo una **stabilità delle variabili di azione per tempi infiniti**: essendo infatti $y(t) = y_0$ e la trasformazione vicina all'identità

$$|I(t) - I_0| \le |I(t) - y(t)| + |y_0 - I_0| = O(\varepsilon)$$

Tuttavia, tale procedimento è genericamente divergente[11], come mostra il seguente esempio:

$$H(I,\varphi) = \omega\cdot I + \varepsilon(I_1 + f(\varphi))$$

con[12] $(I,\varphi) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{T}^2$, $\omega = (\alpha, 1)$ con α scelto in modo da rendere ω diofantino, e

$$f(\varphi) = \sum_{n\in\mathbf{Z}^2} e^{-|n|}\cos n\cdot\varphi$$

Per la densità dei razionali $\forall\varepsilon_0$, $\exists\varepsilon$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ in modo che $\alpha + \varepsilon \in \mathbf{Q}$, cioè $\exists p, q \in \mathbf{Z}$ tali che $\omega^{(\varepsilon)} \equiv (\alpha+\varepsilon, 1) = (p/q, 1)$.

---

[10] La serie formale $\sum_{j\ge1} \varepsilon^j\chi_j$ è detta **serie di Birkhoff.**

[11] "La divergenza delle serie della teoria delle perturbazioni dipende dal fatto che si cerca un oggetto che non esiste. Se cerchiamo di simulare il fenomeno con uno schema che in realtà non ne riproduce i tratti essenziali, allora non sorprende che le nostre serie divergano."

([ARN], pag. 405)

[12] È la perturbazione di un oscillatore armonico.

Sia $\mathcal{R} \equiv \{n \in \mathbf{Z}^2 \text{ tc } n_1 p + n_2 q = 0\}$ l'insieme delle risonanze. Risolvendo per quadrature si ha:

$$\begin{aligned} I(t) - I(0) &= \varepsilon \sum_{n \neq 0} e^{-|n|} n [\sin(n \cdot \varphi_0) \int_0^t \cos(n \cdot \omega^{(\varepsilon)} s)\, ds + \\ &+ \cos(n \cdot \varphi_0) \int_0^t \sin(n \cdot \omega^{(\varepsilon)} s)\, ds] = \\ &= \varepsilon t \mu_0 + \varepsilon \lambda(t) \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \mu_0 &\equiv \sum_{\mathcal{R}} e^{-|n|} n \sin(n \cdot \varphi_0) \\ \lambda(t) &\equiv \sum_{\mathcal{R}^c} e^{-|n|} n [\sin(n \cdot \varphi_0) \frac{\sin(n \cdot \omega^{(\varepsilon)} t)}{n \cdot \omega^{(\varepsilon)}} + \cos(n \cdot \varphi_0) \frac{1 - cos(n \cdot \omega^{(\varepsilon)} t)}{n \cdot \omega^{(\varepsilon)}}] \end{aligned}$$

Il fatto che

$$\mathcal{R}^c = \{n \in \mathbf{Z}^2 \text{ tc } |n_1 p + n_2 q| \geq 1\}$$

implica che se $n \in \mathcal{R}^c$ si ha $|n \cdot \omega^{(\varepsilon)}| \geq |q|^{-1}$. Da ciò segue che λ è limitata:

$$|\lambda| \leq 3 \sum_{\mathcal{R}^c} e^{-|n|} \frac{n}{n \cdot \omega^{(\varepsilon)}} \leq \frac{3}{|q|} \sum_{\mathbf{Z}} e^{-|n|} n$$

Da ciò, essendo λ limitata e $t\mu_0$ divergente, $|I(t) - I_0|$ diverge per $t \longrightarrow \infty$.

(iii) Il motivo per cui le serie di Birkhoff possono divergere è che i denominatori $\omega(y) \cdot n$ delle χ_j al crescere di $|n|$ diventano piccoli[13]. Di più: se ω è un diffeomorfismo[14], a causa della densità dei razionali, ci sarà sempre un y per cui esista un n (con $|n|$ sufficientemente grande) tale che $\omega(y) \cdot n = 0$.

Perciò, al fine di ottenere stime asintotiche sulle variabli di azione è opportuno cambiare[15] tecnica dimostrativa: uno degli accorgimenti che furono

[13] Tale fenomeno è noto col nome di **problema dei piccoli denominatori**.

[14] E per il Teorema del Dini ciò è quanto chiedere det $h''(I_0) \neq 0$.

[15] "Tutto è dimostrabile
soprattutto il contrario
con un'abile
manipolazione
dello scenario."
(Lucio Battisti & Pasquale Panella - *Lo scenario*)

introdotti nella dimostrazione del **Teorema KAM** consiste proprio nel lavorare ad ogni passo dell'iterazione con **la stessa frequenza** non risonante.

Ecco infine un Teorema della media nell'intorno di risonanze: con la stessa dimostrazione del Teorema 4.3, si può ottenere un risultato simile anche in presenza di risonanze; alcune delle variabili angolari andranno però pensate come variabili "lente" (cfr. [ED3], §1.3):

Teorema 4.7 *Consideriamo l'hamiltoniana* $H(I,\varphi) = h(I)+\varepsilon f(I,\varphi;\varepsilon)$*, dove* $(I,\varphi) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{T}^N$*, con* $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ *con* ε_0 *opportunamente piccolo. Siano* $0 \leq s, r \leq N$*,* $s + r = N$*. Denotando con* $\pi^{[r]}$ *la proiezione canonica sulle prime* r *variabili e con* $\pi^{[s]}$ *quella sulle ultime* s *variabili, assumiamo che valga la seguente condizione di* $r-$*risonanza:*

$$h'(I_0) \cdot n = 0,\ n \in \mathbf{N}^N \implies \pi^{[r]}(n) = 0$$

Fissato un intero k*, esiste una trasformazione canonica* Φ_k *vicina all'identità, locale nelle variabili di azione, ma globale negli angoli, tale che, denotata* $\mathcal{H} \equiv H \circ \Phi_k$ *la nuova hamiltoniana nelle nuove variabili* (y,x)*, si ottiene:*

$$\mathcal{H}(y,x) = h(y) + \sum_{j=1}^{k} \varepsilon^j g_j(y, \pi^{[s]}(x)) + O(\varepsilon^{k+1})$$

con

$$g_1(y,\pi^{[s]}(x)) = \frac{1}{\mathrm{mis}\mathbf{T}^r} \int_{\mathbf{T}^r} f(y, \pi^{[r]}(\varphi), \pi^{[s]}(x); 0)\, d\pi^{[r]}(\varphi)$$

Due stime del resto per il Teorema della media sono presentate nelle Appendici D e D. In quest'ultima si mostra che la seconda stima è, in un certo senso, ottimale, esibendo un modello *senza piccoli denominatori* che diverge fattorialmente.

5 Forme normali di Moser nelle vicinanze di un equilibrio iperbolico

Il prossimo risultato è essenzialmente il Lemma 0 del §5 di [CG94]. Esso mostra che nell'intorno dell'equilibrio instabile del pendolo i due rami di separatrice possono essere "raddrizzati" in modo da coincidere con i due assi cartesiani e in modo che il flusso abbia, in tale intorno, l'aspetto

$$p(t) = p(0)\, e^{-\lambda(p(0)q(0))t} \qquad\qquad q(t) = q(0)\, e^{\lambda(p(0)q(0))t}$$

In [CG94] la dimostrazione si basava su un metodo superconvergente (tipo Teorema KAM); qui invece userò serie di potenze ("alla Birkhoff", come nel Teorema 4.3) e il metodo dei maggioranti, seguendo la dimostrazione del Teorema 2 di [M56].

È notevole che mentre le serie formali del Teorema 4.3 divergono, la seguente dimostrazione mostra che in questo caso c'è convergenza delle serie di Birkhoff.

Teorema 5.1 *L'hamiltoniana del pendolo*

$$H(I,\varphi) = \frac{1}{2}I^2 + g^2(\cos\varphi - 1)$$

viene mandata, tramite una trasformazione canonica $(I,\varphi) \longleftrightarrow (p,q)$*, definita nell'intorno*[1] *dell'equilibrio* $(0,0)$*, in un'hamiltoniana "puramente iperbolica", che dipende cioè solo dal prodotto delle variabili:* $\mathcal{H}(pq)$*. Più precisamente, la nuova hamiltoniana ha la forma* $\mathcal{H}(pq) = \omega pq + G(pq)$*, con* $\omega \equiv -g$ *e* $G(J) = \sum_{n\geq 2} G_{2n} J^n$*.*

DIM. Poniamo $C \equiv \sqrt{g}$ e consideriamo la trasformazione canonica

$$\begin{pmatrix} I \\ \varphi \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} C & -C \\ 1/C & 1/C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

Tale trasformazione porta alla nuova hamiltoniana

$$\mathcal{P}(x,y) \equiv H\left(\frac{Cx - Cy}{\sqrt{2}}, \frac{x+y}{\sqrt{2}\,C}\right) = \tag{5.2}$$

$$= \frac{1}{4}(Cx - Cy)^2 + C^4\left(\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}\,C} + \frac{y}{\sqrt{2}\,C}\right) - 1\right) = -C^2 xy + O_4(x,y)$$

[1] Il Teorema 5.2 darà una versione quantitativa di questi intorni: la p, la q e la I varieranno in intorni di ordine 1, la I in un intorno di ordine g.

anzi, più precisamente, ponendo $\omega \equiv -C^2$, possiamo scrivere $\mathcal{P}(x,y) \equiv \omega xy + f(x,y)$, con $f(x,y) = \sum_{n\geq 4} f_n(x,y)$, dove $f_n(x,y)$ sono polinomi omogenei in x e y di grado n: $f_n(x,y) = \sum_{h+k=n} f^n_{hk} x^h y^k$.

Ora data $F(p,q) \equiv \sum_{h,k\in\mathbf{N}} F_{hk} p^h q^k$, denotiamo

$$
\begin{aligned}
\Delta F(pq) &\equiv \sum_{j\in\mathbf{N}} f_{jj} p^j q^j \\
\Lambda F(p,q) &\equiv \sum_{\substack{h,h\in\mathbf{N} \\ h\neq k}} f_{hk} p^h q^k
\end{aligned}
$$

(con queste notazioni $\mathcal{P}(x,y) = \omega xy + \Delta f(xy) + \Lambda f(x,y)$).

Consideriamo ora la trasformazione canonica $(p,q) = \Phi(P,Q)$ di funzione generatrice $W(p,y)$

$$
\begin{gathered}
W(p,y) = \sum_{j\geq 2} W_j(p,y) \\
x = \partial_y W \qquad\qquad q = \partial_p W
\end{gathered} \tag{5.3}
$$

con $W_j(p,y)$ polinomi omogenei di grado j in p e y, in modo che

$$
\mathcal{P}(\partial_y W, y) \equiv \mathcal{H}(p\partial_p W) \tag{5.4}
$$

ovvero

$$
\omega \partial_y W y + f(\partial_y W, y) \equiv \omega p \partial_p W + G(p\partial_p W) \tag{5.5}
$$

Prendendo l'ordine 2 in p, y della (5.5) si ha

$$
\omega y \partial_y W_2 \equiv \omega p \partial_p W_2 \tag{5.6}
$$

che è risolta definendo $W_2(p,y) \equiv py$.

Prendendo l'ordine 3 della (5.5) si ha allo stesso modo

$$
\omega y \partial_y W_3 \equiv \omega p \partial_p W_3 \tag{5.7}
$$

che ha come unica soluzione $W_3(p,y) \equiv 0$.

Prendendo l'ordine 4 della (5.5) si ha

$$
\omega y \partial_y W_4 + f_4(\partial_y W_2, y) \equiv \omega p \partial_p W_4 + G_4\ (p\partial_p W_2)^2 \tag{5.8}
$$

ovvero, per la scelta di W_2:

$$\omega y\partial_y W_4 + f_4(p,y) \equiv \omega p\partial_p W_4 + G_4 p^2 y^2 \tag{5.9}$$

tale equazione si spezza in

$$\begin{aligned} G_4 p^2 y^2 &\equiv \Delta f_4(p,y) = f^4_{22} p^2 y^2 &(5.10)\\ \omega D W_4(p,y) &\equiv \Lambda f_4(p,y) &(5.11)\end{aligned}$$

avendo posto

$$D \equiv p\frac{\partial}{\partial p} - y\frac{\partial}{\partial y}$$

Si osservi che, se $A = \sum A_{hk}p^h y^k$, $B = \sum B_{hk}p^h y^k$, allora l'equazione $\omega DA = \Lambda B$ ha la soluzione

$$A_{hk} = \begin{cases} \dfrac{B_{hk}}{\omega(h-k)} & \text{se } h \neq k \\ 0 & \text{se } h = k \end{cases}$$

$$\text{ovvero} \qquad A = \sum_{h\neq k} \frac{B_{hk}}{\omega(h-k)} p^h y^k \equiv D^{-1}B \tag{5.12}$$

Però, data comunque $\delta : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, anche $D^{-1}B + \delta(py)$ è soluzione di $\omega DA = \Lambda B$.

Si risolvono quindi le (5.10), (5.11) scegliendo

$$G_4 \equiv f^4_{22} \ \text{ e } \ W_4 \equiv D^{-1}f_4 + \delta_4 p^2 y^2$$

essendo δ_4 un coefficiente per ora arbitrario.

È inoltre conveniente porre $G_j \equiv 0$ se j è dispari (in modo che i G_j siano definiti per tutti gli interi, come lo sono le W_j.

Supponiamo ricorsivamente[2] di aver determinato $W_j(p,y)$ e G_j con $j \leq n-1$ e determiniamo $W_n(p,y)$ e G_n. Prendendo l'ordine n in p,y della (5.5) si ha

$$\omega y\partial_y W_n + [f(\partial_y W, y)]_n \equiv \omega p\partial_p W_n + [G(p\partial_p W)]_n \tag{5.13}$$

[2] Denoterò $[\cdot]_n$ l'ordine n: $[\sum F_{hk}p^h y^k]_n \equiv \sum\limits_{h+k=n} F_{hk}p^h y^k$.

In questo modo, se $F = \sum F_n(p,y)$ con F_n polinomi omogenei di grado n in p,y, si ha $[F]_n = F_n$.

Denoterò anche $(\sum F_{hk}p^h y^k)_{\bar h\bar k} = F_{\bar h\bar k}$.

Con queste notazioni, $[F]_n = \sum_{h+k=n}(F)_{hk}p^h q^k$.

Si ha però:

$$\begin{aligned}
[G(p\partial_p W)]_n &= [\sum_{j\geq 2} G_{2j}(p\partial_p W)^j]_n = [\sum_{2\leq j\leq n/2} G_{2j}(p\partial_p W)^j]_n = \\
&= G_n(p\partial_p W_2)^{n/2} + [\sum_{2\leq j\leq n/2-1} G_{2j}(p\partial_p W)^j]_n = \\
&= G_n(py)^{n/2} + [\sum_{2\leq j\leq n/2-1} G_{2j}(p\sum_{m\geq 2}\partial_p W_m)^j]_n = \\
&= G_n(py)^{n/2} + [\sum_{2\leq j\leq n/2-1} G_{2j}(p\sum_{2\leq m\leq n-1}\partial_p W_m)^j]_n \qquad (5.14)
\end{aligned}$$

Inoltre $[f(\partial_y W, y)]_n$ è nota una volta note le W_j per $j \leq n-1$: infatti abbiamo

$$\begin{aligned}
[f(\partial_y W, y)]_n &= \sum_{4\leq m\leq n} [f_m(\partial_y W, y)]_n = \sum_{4\leq m\leq n}\sum_{h+k=m} f^m_{hk}[(\partial W)^h y^k] = \\
&= \sum_{4\leq m\leq n}\sum_{h+k=m}\sum_{\substack{j_1,\ldots,j_h\geq 2\\ (j_1-1)+\ldots+(j_h-1)+k=n}} f^m_{hk}\,\partial_y W_{j_1}\ldots\,\partial_y W_{j_h} y^k = \\
&= \sum_{4\leq m\leq n}\sum_{h+k=m}\sum_{\substack{2\leq j_1,\ldots,j_h\leq 2\\ j_1+\ldots+j_h-h+k=n}} f^m_{hk}\,\partial_y W_{j_1}\ldots\,\partial_y W_{j_h} y^k \qquad (5.15)
\end{aligned}$$

Per[3] questo, la funzione

$$\Xi_n(p,y) \equiv [f(\partial_y W, y)]_n - [\sum_{2\leq j\leq n/2-1} G_{2j}(p\sum_{2\leq m\leq n-1}\partial_p W_m)^j]_n \qquad (5.16)$$

è nota una volta noti i G_j e le W_j per $j \leq n-1$. Inoltre, per costruzione Ξ_n è un polinomio omogeneo di grado n. Scriverò quindi $\Xi_n(p,y) = \sum_{h+k=n} \Xi^n_{hk} p^h y^k$.

Con le (5.13), (5.14) e (5.16) giungiamo a

$$\omega p\partial_p W_n - \omega y\partial_y W_n + G_n\,(py)^{n/2} \equiv \Xi_n$$

[3]Nell'ultimo passaggio di (5.15) ho usato il fatto che

$$\left.\begin{array}{cc} 4\leq m\leq n, & h+k=m \\ j_1,\ldots,j_h\geq 2, & j_1+\ldots+j_h-h+k=n \end{array}\right\} \implies j_1,\ldots,j_h\leq n-1$$

Ciò si dimostra cosí: se P.A. $\exists j_i \geq n$, allora

$$\begin{aligned}
& n = j_1+\ldots+j_h-h+k \geq 2(h-1)+n-h+k = -2+n+h+k = \\
= \; & -2+n+m \geq -2+m+4 = n+2
\end{aligned}$$

che è assurdo.

ovvero

$$\omega D W_n + G_n\,(py)^{n/2} \equiv \Delta\Xi_n(py) + \Lambda\Xi_n(p,y)$$

Tale equazione si spezza in

$$\begin{aligned} \omega D W_n &\equiv \Lambda\Xi_n && (5.17) \\ G_n\,(py)^{n/2} &\equiv \Delta\Xi_n && (5.18) \end{aligned}$$

La (5.17) si risolve, grazie a (5.12), ponendo[4] $W_n \equiv D^{-1}\Xi_n$ se n è dispari e $W_n \equiv D^{-1}\Xi_n + \delta_n p^{n/2} y^{n/2}$ se n è pari.

Per quanto riguarda la (5.18): se n è dispari, visto che un polinomio omogeneo in p e y di grado dispari non può contenere termini in cui p e y compaiono con lo stesso esponente (giacchè questi termini avrebbero grado pari), si ha $\Delta\Xi_n = 0$, per cui la (5.18) è risolta prendendo $G_n \equiv 0$. Se $n = 2\bar{n}$ è pari si ha

$$\Delta\Xi_{2\bar{n}} = \Delta\left(\sum_{h+k=2\bar{n}} \Xi^{2\bar{n}}_{hk} p^h y^k\right) = \Xi^{2\bar{n}}_{\bar{n}\bar{n}} p^{\bar{n}} y^{\bar{n}}$$

per cui la (5.18) è risolta con $G_{2\bar{n}} \equiv \Xi^{2\bar{n}}_{\bar{n}\bar{n}}$.

Questo definisce formalmente una trasformazione canonica

$$(x,y) = (X(p,q), Y(p,q)) \tag{5.19}$$

che verifica (in virtù della (5.4)):

$$\mathcal{P}\left(X(p,q), Y(p,q)\right) = \mathcal{H}(pq) \tag{5.20}$$

Sceglieremo ora in modo opportuno i coefficienti arbitrari δ_n in modo che le serie formali sopra ottenute convergano.

Affermo che è possibile scegliere i δ_n in modo che la trasformazione canonica (5.19) verifichi

$$\Delta\left(\partial_q Y(p,q) - 1\right) = 0 \tag{5.21}$$

Infatti: per costruzione è

$$Y(p,q) = q - \sum_{r\geq 4} \partial_p W_r(p, Y(p,q)) \tag{5.22}$$

[4] I δ_n sono, per il momento, coefficienti arbitrari. In seguito li sceglierò opportunamente al fine di ottenere serie convergenti.

perciò

$$\partial_q Y(p,q) - 1 = -\sum_{r\geq 4} \partial^2_{py} W_r(p, Y(p,q)) \cdot \partial_q Y(p,q) \tag{5.23}$$

Poi, per ricordarci che la Y dipende dalla scelta dei δ_n, denoteremo

$$Y(p,q) = q + \sum_{m\geq 2} Y_m(p,q;\{\delta_n\}_{n\geq 4}) \tag{5.24}$$

Affermo che $Y_2 = 0$ e che

$$Y_m \text{ dipende solo da } \delta_4, \ldots, \delta_{m+1}, \ \forall m \geq 3 \tag{5.25}$$

Infatti, uguagliando (5.22) e (5.24):

$$\sum_{m\geq 2} Y_m(p,q;\{\delta_n\}_{n\geq 4}) = -\sum_{r\geq 4} \partial_p W_r(p, q + \sum_{m\geq 2} Y_m(p,q;\{\delta_n\}_{n\geq 4})) \tag{5.26}$$

Prendendone $[\cdot]_2$ si trova $Y_2(p,q;\{\delta_n\}_{n\geq 4}) = 0$; prendendone $[\cdot]_3$ si ha

$$Y_3(p,q;\{\delta_n\}_{n\geq 4}) = -\sum_{r\geq 4}[\partial_p W_r(p, q + \sum_{m\geq 2} Y_m(p,q;\{\delta_n\}_{n\geq 4}))]_3 = -\partial_p W_4(p,q)$$

in cui l'ultimo membro dipende solo da δ_4 e non dagli altri δ_n, per cui Y_3 dipende solo da δ_4. Scriviamo perciò $Y_3(p,q;\{\delta_n\}_{n\geq 4}) = Y_3(p,q;\delta_4)$. Procediamo poi per induzione: supponiamo che Y_j dipenda solo da $\delta_4, \ldots, \delta_{j+1}$, $\forall 3 \leq j \leq \nu - 1$ e prendiamo $[\cdot]_\nu$ di (5.26):

$$\begin{aligned} Y_\nu(p,q;\{\delta_n\}_{n\geq 4}) &= -\sum_{r\geq 4}[\partial_p W_r(p, q + \sum_{m\geq 2} Y_m(p,q;\{\delta_n\}_{n\geq 4}))]_\nu = \\ &= \sum_{4\leq r\leq \nu+1} [\partial_p W_r(p, q + \sum_{2\leq m\leq \nu} Y_m(p,q;\{\delta_n\}_{4\leq n\leq m+1}))]_\nu \end{aligned}$$

l'ultimo membro è noto una volta noti $\delta_4, \ldots, \delta_{\nu+1}$. Ciò prova (5.25).

Scegliamo ora i δ_n in modo che valga (5.21), o, equivalentemente, che $[\partial_q Y - 1]_m$ non contenga termini del tipo $p^{m/2}q^{m/2}$. Riscriviamo la (5.23) cosí:

$$\begin{aligned} 1 - \partial_q Y(p,q) &= \sum_{r\geq 4} \partial^2_{py} W_r(p, q + \sum_{m\geq 3} Y_m(p,q;\{\delta_n\}_{4\leq n\leq m+1}))\cdot \\ &\quad \cdot(1 + \sum_{m\geq 3} \partial_q Y_m(p,q;\{\delta_n\}_{4\leq n\leq m+1})) \end{aligned} \tag{5.27}$$

e prendiamone $[\cdot]_2$, ricordando anche la definizione di W_4:

$$[1-\partial_q Y(p,q)]_2 = \partial^2_{py} W_4(p,q) = \partial^2_{py}(D^{-1}f_4) + 4\delta_4 py$$

che non contiene termini del tipo py se scegliamo δ_4 in modo che

$$(\partial^2_{py}(D^{-1}f_4))_{11} + 4\delta_4 = 0$$

cioè $\delta_4 \equiv -\dfrac{1}{4}(\partial^2_{py}(D^{-1}f_4))_{11}$.

Supponiamo poi ricorsivamente di aver determinato $\delta_4, \ldots, \delta_{\nu-1}$ e prendiamo $[\cdot]_{\nu-2}$ di (5.27)

$$\begin{aligned}
[1-\partial_q Y]_{\nu-2} \quad = \quad & \sum_{\substack{a+b=\nu-2\\ 0\le a\le \nu-2\\ 0\le b\le \nu-2}} \sum_{4\le r\le a+2} [\partial^2_{py} W_r(p, q + \sum_{3\le m\le a} Y_m(p,q;\{\delta_n\}_{4\le n\le m+1}))]_a \cdot \\
& \cdot [1 + \sum_{3\le m\le b+1} \partial_q Y_m(p,q;\{\delta_n\}_{4\le n\le m+1})]_b = \\
= \quad & \sum_{\substack{a+b=\nu-2\\ 0\le a\le \nu-3\\ 0\le b\le \nu-2}} \sum_{4\le r\le a+2} [\partial^2_{py} W_r(p, q + \sum_{3\le m\le a} Y_m(p,q;\{\delta_n\}_{4\le n\le m+1}))]_a \cdot \\
& \cdot [1 + \sum_{3\le m\le b+1} \partial_q Y_m(p,q;\{\delta_n\}_{4\le n\le m+1})]_b + \\
& + \sum_{4\le r\le \nu} [\partial^2_{py} W_r(p, q + \sum_{3\le m\le \nu-2} Y_m(p,q;\{\delta_n\}_{4\le n\le m+1}))]_{\nu-2} = \\
= \quad & \sum_{\substack{a+b=\nu-2\\ 0\le a\le \nu-3\\ 0\le b\le \nu-3}} \sum_{4\le r\le a+2} [\partial^2_{py} W_r(p, q + \sum_{3\le m\le a} Y_m(p,q;\{\delta_n\}_{4\le n\le m+1}))]_a \cdot \\
& \cdot [1 + \sum_{3\le m\le b+1} \partial_q Y_m(p,q;\{\delta_n\}_{4\le n\le m+1})]_b + \\
& + \sum_{4\le r\le \nu-1} [\partial^2_{py} W_r(p, q + \sum_{3\le m\le \nu-2} Y_m(p,q;\{\delta_n\}_{4\le n\le m+1}))]_{\nu-2} + \\
& + \partial^2_{py} W_\nu(p,q)
\end{aligned}$$

Ponendo perciò[5]

$$\mathcal{S}_{\nu-1} \quad \equiv \quad \sum_{\substack{a+b=\nu-2\\ 0\le a\le \nu-3\\ 0\le b\le \nu-3}} \sum_{4\le r\le a+2} [\partial^2_{py} W_r(p, q + \sum_{3\le m\le a} Y_m(p,q;\{\delta_n\}_{4\le n\le m+1}))]_a \cdot$$

[5] $\mathcal{S}_{\nu-1}$ è noto per l'ipotesi induttiva!

$$\cdot[1+\sum_{3\leq m\leq b+1}\partial_q Y_m(p,q;\{\delta_n\}_{4\leq n\leq m+1})]_b+$$
$$+\sum_{4\leq r\leq \nu-1}[\partial^2_{py}W_r(p,q+\sum_{3\leq m\leq \nu-2}Y_m(p,q;\{\delta_n\}_{4\leq n\leq m+1}))]_{\nu-2}$$

e ricordando la definizione di W_ν si ottiene

$$[1-\partial_q Y]_{\nu-2}=\mathcal{S}_{\nu-1}+\begin{cases}\partial^2_{py}(D^{-1}\Xi_\nu) & \text{per } \nu \text{ dispari}\\ \partial^2_{py}(D^{-1}\Xi_\nu)+\dfrac{\nu^2}{4}p^{\nu/2}y^{\nu/2} & \text{per } \nu \text{ pari}\end{cases}$$

Se ν è dispari, certo $[1-\partial_q Y]_{\nu-2}$ non contiene termini del tipo $p^{\nu/2}y^{\nu/2}$ e quindi la condizione (5.21) è ovviamente verificata; se ν è pari, affinchè $[1-\partial_q Y]_{\nu-2}$ non contenga termini del tipo $p^{\nu/2}y^{\nu/2}$ devo scegliere δ_n in modo che

$$(\mathcal{S}_{\nu-1}+\partial^2_{py}(D^{-1}\Xi_\nu)+\frac{\nu^2}{4}p^{\nu/2}y^{\nu/2})_{\nu/2,\nu/2}=0$$

cioè

$$\delta_n\equiv-\frac{4}{\nu^2}(\mathcal{S}_{\nu-1}+\partial^2_{py}(D^{-1}\Xi_\nu))_{\nu/2,\nu/2}$$

Ciò definisce ricorsivamente i δ_n in modo da verificare (5.21).

Mostro ora la convergenza delle precedenti serie formali. Le equazioni di Hamilton per la $\mathcal{H}$ conducono all'integrazione nel sistema nelle nuove variabili: $\dot p=-\mathcal{H}(pq)\,p$, $\dot q=\mathcal{H}(pq)\,q$, $p(t)q(t)=p(0)q(0)$. Per cui

$$-\mathcal{P}_y(X,Y)=\frac{d}{dt}X=-p\frac{\partial X}{\partial p}\,\mathcal{H}'(pq)+q\frac{\partial X}{\partial q}\,\mathcal{H}'(pq)$$
$$\mathcal{P}_x(X,Y)=\frac{d}{dt}Y=-p\frac{\partial Y}{\partial p}\,\mathcal{H}'(pq)+q\frac{\partial Y}{\partial q}\,\mathcal{H}'(pq)$$

ovvero, ponendo

$$D_1\equiv p\frac{\partial}{\partial p}-q\frac{\partial}{\partial q}$$

si ottiene che la trasformazione canonica $(X(p,q),Y(p,q))$ verifica

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_y(X,Y)&=D_1X\cdot\mathcal{H}'(pq)\\ -\mathcal{P}_x(X,Y)&=D_1Y\cdot\mathcal{H}'(pq)\end{aligned}\tag{5.28}$$

Poniamo[6]

$$
\begin{array}{ll}
X^*(p,q) \equiv X(p,q) - p & Y^*(p,q) \equiv Y(p,q) - q \\
\mathcal{P}^*(x,y) \equiv \mathcal{P}(x,y) - \omega xy & \mathcal{H}^*(p,q) \equiv \mathcal{H}'(pq) - \omega
\end{array}
\tag{5.29}
$$

Introduciamo anche l'operatore differenziale

$$
D_2 \equiv p\frac{\partial}{\partial p} + q\frac{\partial}{\partial q}
$$

Si verifica facilmente che gli operatori differenziali D_1 e D_2 commutano. Poniamo infine

$$
\mathcal{X} \equiv D_2 X^* \qquad\qquad \mathcal{Y} \equiv D_2 Y^* \tag{5.30}
$$

Da (5.28), (5.29) e (5.30) si ottiene con un calcolo diretto:

$$
\begin{aligned}
& \omega(D_1 - 1)\mathcal{X} + D_2(p\mathcal{H}^*) + D_2(\mathcal{H}^*\ D_1X^*) = \\
= \ & D_2\left(\omega(D_1-1)X^* + p\mathcal{H}^* + \mathcal{H}^*\ D_1X^*\right) = \\
= \ & D_2\left(\omega D_1X^* - \omega X^* + p\mathcal{H}^* + \mathcal{H}^*\ D_1X^*\right) = \\
= \ & D_2\left(\omega D_1(X-p) - \omega X + p\mathcal{H}' + (\mathcal{H}'-\omega)\ D_1(X-p)\right) = \\
= \ & D_2\left(-\omega X + p\mathcal{H}' + \mathcal{H}'\ D_1(X-p)\right) = D_2\left(-\omega X + \mathcal{H}'\ D_1X\right) = \\
= \ & D_2(-\omega X + \mathcal{P}_y) = -\omega D_2X + D_2\mathcal{P}_y = \\
= \ & -\omega D_2X + \mathcal{P}_{xy}\ D_2X + \mathcal{P}_{yy}\ D_2Y
\end{aligned}
\tag{5.31}
$$

e anche

$$
\begin{aligned}
& (p+\mathcal{X})\mathcal{P}^*_{xy} + (q+\mathcal{Y})\mathcal{P}^*_{yy} = (p + D_2X^*)(\mathcal{P}_{xy} - \omega) + (q + D_2Y^*)\mathcal{P}_{yy} = \\
= \ & D_2X\ (\mathcal{P}_{xy} - \omega) + D_2Y\mathcal{P}_{yy} = \\
= \ & -\omega D_2X + \mathcal{P}_{xy}\ D_2X + \mathcal{P}_{yy}\ D_2Y
\end{aligned}
\tag{5.32}
$$

[6]Le definizioni (5.29) servono solo per avere cose senza l'ordine 0: poichè

$$
X\left(p, q(p,y)\right) = \partial_y W = p + \sum_{n\geq 3} \partial_p W_n(p,y)
$$

si ha

$$
X^*(0,0) = \sum_{n\geq 3} \partial_p W_n(0, Y(0,0)) = \sum_{n\geq 3} \partial_p W_n(0,0) = 0
$$

e allo stesso modo $Y^*(0,0) = 0$.

E cosí pure $\mathcal{P}^*(x,y) \equiv O_4(x,y)$ (ricordando la (5.2)); infine, essendo $\mathcal{H}'(xy) = \omega + O(xy)$ si ha $\mathcal{H}^*(0) = 0$.

Da (5.31) e (5.32) si giunge a

$$\omega(D_1-1)\mathcal{X}+D_2(p\mathcal{H}^*)+D_2(\mathcal{H}^*\ D_1X^*)=(p+\mathcal{X})\mathcal{P}^*_{xy}+(q+\mathcal{Y})\mathcal{P}^*_{yy} \tag{5.33}$$

Procedendo come nella (5.31) si ottiene poi

$$\omega(D_1+1)\mathcal{Y}-D_2(q\mathcal{H}^*)+D_2(\mathcal{H}^*\ D_1Y^*)=\omega D_2Y-\mathcal{P}_{xx}\ D_2X-\mathcal{P}_{xy}\ D_2Y \tag{5.34}$$

e come nella (5.32) si ha

$$(p+\mathcal{X})\mathcal{P}^*_{xx}+(q+\mathcal{Y})\mathcal{P}^*_{xy}=-\omega D_2Y+\mathcal{P}_{xx}\ D_2X+\mathcal{P}_{xy}\ D_2Y \tag{5.35}$$

Da (5.34) e (5.35) si ottiene

$$\omega(D_1+1)\mathcal{Y}-D_2(q\mathcal{H}^*)+D_2(\mathcal{H}^*\ D_1Y^*)=-(p+\mathcal{X})\mathcal{P}^*_{xx}-(q+\mathcal{Y})\mathcal{P}^*_{xy} \tag{5.36}$$

Le (5.33) e (5.36) si scrivono:

$$\begin{aligned}\omega(D_1-1)\mathcal{X}+D_2(p\mathcal{H}^*) &= (p+\mathcal{X})\mathcal{P}^*_{xy}+(q+\mathcal{Y})\mathcal{P}^*_{yy}-D_2(\mathcal{H}^*\ D_1X^*)\\ \omega(D_1+1)\mathcal{Y}-D_2(q\mathcal{H}^*) &= -(p+\mathcal{X})\mathcal{P}^*_{xx}-(q+\mathcal{Y})\mathcal{P}^*_{xy}-D_2(\mathcal{H}^*\ D_1Y^*)\end{aligned} \tag{5.37}$$

Se denotiamo

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(X,Y) &= \omega XY+\sum_{h+k\geq 4}\mathcal{P}_{hk}X^hY^k\\ X(p,q) &= p+\sum_{h+k\geq 2}X_{hk}p^hq^k\\ Y(p,q) &= q+\sum_{h+k\geq 2}Y_{hk}p^hq^k\\ \mathcal{H}(pq) &= \omega pq+\sum_{j\geq 2}G_{2j}p^jq^j\end{aligned} \tag{5.38}$$

si ha

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^*(X,Y) &= \sum_{h+k\geq 4}\mathcal{P}_{hk}X^hY^k\\ X^*(p,q) &= \sum_{h+k\geq 2}X_{hk}p^hq^k\\ Y^*(p,q) &= \sum_{h+k\geq 2}Y_{hk}p^hq^k\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}^*(pq) &= \sum_{j\geq 2} G_{2j} j\, p^{j-1}q^{j-1} = \sum_{i\geq 1} G_{2(i+1)}(i+1)\, p^i q^i = \sum_{i\geq 1} \mathcal{H}^*_{2i} p^i q^i \\
\mathcal{X}(p,q) &= \sum_{h+k\geq 2} (h+k) X_{hk} p^h q^k = \sum_{h+k\geq 2} \mathcal{X}_{hk} p^h q^k \\
\mathcal{Y}(p,q) &= \sum_{h+k\geq 2} (h+k) Y_{hk} p^h q^k = \sum_{h+k\geq 2} \mathcal{Y}_{hk} p^h q^k
\end{aligned}
\tag{5.39}
$$

Con queste notazioni, la condizione (5.21) dice che

$$
0 = \Delta(\partial_q Y - 1) = \sum_{h\geq 1} Y_{h,h+1}(h+1) p^h q^h
$$

per cui

$$
Y_{h,h+1} = 0 \qquad\qquad \forall h \geq 1 \tag{5.40}
$$

Si deve osservare che la (5.37) è fatta in modo che i membri di destra di ordine n dipendano solo da[7]

$$
\mathcal{X}_{hk}, \mathcal{Y}_{hk} \text{ con } h+k \leq n-2 \text{ e } \mathcal{H}^*_j \text{ con } j \leq n-2 \tag{5.41}
$$

mentre l'ordine n dei membri di sinistra dipende solo da

$$
\mathcal{X}_{hk}, \mathcal{Y}_{hk} \text{ con } h+k = n \text{ e } \mathcal{H}^*_{n-1} \tag{5.42}
$$

Infatti: prendendo l'ordine n delle (5.37) si ottiene:

$$
\begin{aligned}
&\omega \sum_{h+k=n} (h-k-1)\mathcal{X}_{hk} p^h q^k + n\mathcal{H}^*_{n-1} p^{(n+1)/2} q^{(n-1)/2} \\
= &\sum_{\heartsuit} \Big\{ \mathcal{X}_{hk}\, (\mathcal{P}^*_{xy})_{\tilde{h}\tilde{k}}\, X_{a_1 b_1} \ldots X_{a_{\tilde{h}} b_{\tilde{h}}}\, Y_{\alpha_1\beta_1} \ldots Y_{\alpha_{\tilde{k}}\beta_{\tilde{k}}} + \\
&+ \mathcal{Y}_{hk}\, (\mathcal{P}^*_{yy})_{\tilde{h}\tilde{k}}\, X_{a_1 b_1} \ldots X_{a_{\tilde{h}} b_{\tilde{h}}}\, Y_{\alpha_1\beta_1} \ldots Y_{\alpha_{\tilde{k}}\beta_{\tilde{k}}} \Big\} \cdot \\
&\cdot p^{h+a_1+\ldots+a_{\tilde{h}}+\alpha_1+\ldots+\alpha_{\tilde{k}}} q^{k+b_1+\ldots+b_{\tilde{h}}+\beta_1+\ldots+\beta_{\tilde{k}}} - \\
&- \sum_{\substack{i\geq 1,\, h+k\geq 2\\ 2i+h+k=n}} \mathcal{H}^*_{2i} X_{hk} n(h-k) p^{i+h} q^{i+k}
\end{aligned}
$$

e

$$
\omega \sum_{h+k=n} (h-k-1)\mathcal{Y}_{hk} p^h q^k - n\mathcal{H}^*_{n-1} p^{(n-1)/2} q^{(n+1)/2}
$$

[7]Si ricordi che abbiamo definito $G_j \equiv 0$ per tutti i j dispari.

$$
\begin{aligned}
= \quad & -\sum_{\heartsuit} \Big\{ \mathcal{X}_{hk}\, (\mathcal{P}^*_{xx})_{\tilde h \tilde k}\, X_{a_1 b_1} \dots X_{a_{\tilde h} b_{\tilde h}}\, Y_{\alpha_1 \beta_1} \dots Y_{\alpha_{\tilde k} \beta_{\tilde k}} + \\
& + \mathcal{Y}_{hk}\, (\mathcal{P}^*_{xy})_{\tilde h \tilde k}\, X_{a_1 b_1} \dots X_{a_{\tilde h} b_{\tilde h}}\, Y_{\alpha_1 \beta_1} \dots Y_{\alpha_{\tilde k} \beta_{\tilde k}} \Big\} \cdot \\
& \cdot p^{h + a_1 + \dots + a_{\tilde h} + \alpha_1 + \dots + \alpha_{\tilde k}} q^{k + b_1 + \dots + b_{\tilde h} + \beta_1 + \dots + \beta_{\tilde k}} \\
& - \sum_{\substack{i \geq 1,\ h+k \geq 2 \\ 2i+h+k=n}} \mathcal{H}^*_{2i} Y_{hk} n(h-k) p^{i+h} q^{i+k}
\end{aligned}
\tag{5.43}
$$

avendo denotato per brevità $\heartsuit$ l'insieme degli indici

$$
\begin{array}{l}
h+k \geq 1,\ \tilde h + \tilde k \geq 4,\ a_i + b_i \geq 1,\ \alpha_j + \beta_j \geq 1, \\
\text{con } 1 \leq i \leq \tilde h,\ 1 \leq j \leq \tilde k
\end{array}
$$

$$
\text{e} \quad h + k + \sum_{1 \leq i \leq \tilde h} (a_i + b_i) + \sum_{1 \leq j \leq \tilde k} (\alpha_j + \beta_j) = n
$$

La (5.41) segue osservando che gli indici di $\heartsuit$ verificano

$$
h+k \leq n-2,\ a_i + b_i \leq n-2,\ \alpha_j + \beta_j \leq n-2
$$

(perchè se una di queste non fosse vera si avrebbe

$$
\begin{aligned}
n \quad & = \quad h + k + \sum_{1 \leq i \leq \tilde h} (a_i + b_i) + \sum_{1 \leq j \leq \tilde k} (\alpha_j + \beta_j) \geq \\
& \geq \quad n - 1 + \tilde h + \tilde k \geq n - 1 + 4 = n + 3
\end{aligned}
$$

che è assurdo) e che

$$
\left. \begin{array}{c} i \geq 1,\ h+k \geq 2 \\ 2i + h + k = n \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{c} 2i \leq n-2 \\ h+k \leq n-2 \end{array} \right.
$$

(poichè $2i = n - (h+k) \leq n-2$ e $h + k = n - 2i \leq n - 2$).

Per l'analiticità di $\mathcal{P}$ possiamo trovare $c > 1$ tale che

$$
\max\{|(\mathcal{P}_{xx})_{hk}|,\ |(\mathcal{P}_{xy})_{hk}|,\ |(\mathcal{P}_{yy})_{hk}|\} \leq c^{h+k}
\tag{5.44}
$$

Sia allora

$$
\sigma(s) \equiv \frac{cs}{1-cs}\,, \qquad\qquad s \in \mathbf{R}
$$

Date due funzioni $A = \sum A_{hk} p^h q^k$, $B = \sum B_{hk} p^h q^k$ dico che B maggiora A (e scrivo $A \prec B$) se $|A_{hk}| \leq B_{hk}$. Allora:

$$\begin{aligned}
\sigma(x+y) &= \frac{1}{1-c(x+y)} - 1 = \sum_{j\geq 0} c^j (x+y)^j - 1 = \qquad (5.45)\\
&= \sum_{j\geq 0} \sum_{0\leq k\leq j} c^j \binom{j}{k} x^{j-k} y^k - 1 = \sum_{h,k\geq 0} c^{h+k} \binom{h+k}{k} x^h y^k - 1 = \\
&= \sum_{h+k\geq 1} c^{h+k} \binom{h+k}{k} x^h y^k \succ \sum_{h+k\geq 1} c^{h+k} x^h y^k \overset{(5.44)}{\succ} \mathcal{P}_{xx}, \mathcal{P}_{xy}, \mathcal{P}_{yy}
\end{aligned}$$

Poniamo $\kappa \equiv \min\{1, |\omega|/3\}$. Sia adesso

$$\Phi(\zeta, s) \equiv \zeta\ (1 - sc(1+\zeta)) - 4\kappa^{-1} \left(sc(1+\zeta)^2 + \zeta^2 \right)$$

poichè $\Phi(0,0) = 0$ e $\partial_\zeta \Phi(0,0) = 1$, per il Teorema del Dini (in versione analitica) $\exists! \zeta(s)$ analitica nelle vicinanze di $s = 0$ tale che $\zeta(0) = 0$ e $\Phi(\zeta(s), s) = 0$. Ovvero $\zeta = \zeta(s)$ verifica

$$\zeta = 4\kappa^{-1} \frac{sc(1+\zeta)^2 + \zeta^2}{1 - c(s + s\zeta)} \qquad (5.46)$$

Moltiplicando ambo i membri della precedente relazione per s e ponendo $\overline{M}(s) \equiv s\,\zeta(s)$, si ha che $\overline{M}$ verifica

$$\overline{M} = 4\kappa^{-1} \frac{c(s+\overline{M})^2 + \dfrac{\overline{M}^2}{s}}{1 - c(s+\overline{M})} \qquad (5.47)$$

Poniamo $M(p,q) \equiv \overline{M}(p+q)$. La precedente equazione si scrive[8]

$$M(p,q) = 4\kappa^{-1} \frac{c\,(p+q+M(p,q))^2 + \dfrac{M^2(p,q)}{p+q}}{1 - c\,(p+q+M(p,q))} \qquad (5.48)$$

Se scriviamo

$$\zeta(s) = \sum_{i\geq -1} \zeta_i s^i \qquad \text{con } \zeta_0 \equiv \zeta_{-1} \equiv 0$$

[8]Si osservi che $\dfrac{M(p,q)}{p+q} = \dfrac{\overline{M}(p+q)}{p+q} = \zeta(p+q)$ è anch'essa analitica.

si ha

$$\begin{aligned}
M(p,q) &= (p+q)\cdot\zeta(p+q) = \sum_{i\geq -1}\zeta_i(p+q)^{i+1} = \\
&= \sum_{j\geq 0}\zeta_{j-1}(p+q)^j = \sum_{j\geq 0}\sum_{0\leq h\leq j}\zeta_{j-1}\binom{j}{h}p^h q^{j-h} = \\
&= \sum_{h,k\geq 0}\zeta_{h+k-1}\binom{h+k}{h}p^h q^k
\end{aligned}$$

cioè

$$M_{hk} = \zeta_{h+k-1}\binom{h+k}{h} \tag{5.49}$$

Inoltre:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{2M}{p+q}\right)_{hk} &= \left(2\sum_{i\geq 0}\zeta_i(p+q)^i\right)_{hk} = \left(2\sum_{i\geq 0}\sum_{0\leq h\leq i}\zeta_i\binom{i}{h}p^h q^{i-h}\right)_{hk} = \\
&= \left(\sum_{h,k\geq 0}2\zeta_{h+k}\binom{h+k}{h}p^h q^k\right)_{hk} = 2\binom{h+k}{h}\zeta_{h+k} \qquad (5.50)
\end{aligned}$$

E anche

$$\begin{aligned}
&\kappa(p+q)\,M \overset{(5.48)}{=} 4\frac{c(p+q)(p+q+M)^2+M^2}{1-c(p+q+M)} \succ \\
\succ\ & 4(c(p+q)(p+q+M)^2+M^2) \succ 4M^2 \qquad (5.51)
\end{aligned}$$

Affermo che

$$D_1\mathcal{X}+\Delta\mathcal{X}\prec M \qquad D_1\mathcal{Y}+\Delta\mathcal{Y}\prec M \qquad (p+q)\,D_2\mathcal{H}^*\prec M \tag{5.52}$$

Se la relazione precedente è vera, la dimostrazione termina in questo modo:

$$\begin{aligned}
M &\succ D_1\mathcal{X}+\Delta\mathcal{X} = D_1D_2X^*+\Delta D_2X^* = \\
&= \sum_{h+k\geq 2}(h-k)(h+k)X_{hk}p^hq^k + \sum_{h\geq 1}2hX_{hh}p^hq^h
\end{aligned}$$

dice che

$$M_{hk}\geq\begin{cases}2h|X_{hh}| & \text{se } h=k\\ |X_{hk}|\,|h^2-k^2| & \text{se } h\neq k\end{cases}\geq\begin{cases}|X_{hh}| & \text{se } h=k\\ |X_{hk}| & \text{se } h\neq k\end{cases} = |X_{hk}|$$

$\forall h + k \geq 2$, che mostra

$$X \prec M + p \tag{5.53}$$

In modo analogo

$$Y \prec M + q \tag{5.54}$$

E poi:

$$\begin{aligned} M &\succ (p+q)\, D_2 \mathcal{H}^* = (p+q)\, D_2 \left(\sum_{i \geq 1} \mathcal{H}^*_{2i} p^i q^i \right) = (p+q) \sum_{i \geq 1} 2i \mathcal{H}^*_{2i} p^i q^i = \\ &= \sum_{i \geq 1} 2i \mathcal{H}^*_{2i} p^{i+1} q^i + \sum_{i \geq 1} 2i \mathcal{H}^*_{2i} p^i q^{i+1} \end{aligned}$$

Prendendone $(\cdot)_{k+1,k}$: e ricordando (5.39):

$$M_{k+1,k} \geq 2k|\mathcal{H}^*_{2k}| \geq |\mathcal{H}^*_{2k}| = (k+1)\, G_{2(k+1)} \geq G_{2(k+1)} \tag{5.55}$$

Le (5.53), (5.54) e (5.55) mostrano la convergenza della trasformazione canonica $(x, y) = (X(p, q), Y(p, q))$ e della nuova hamiltoniana $\mathcal{H}(pq)$.

Per terminare la dimostrazione devo provare la (5.52). Poichè per costruzione l'ordine 0 di $D_1\mathcal{X} + \Delta\mathcal{X}$, di $D_1\mathcal{Y} + \Delta\mathcal{Y}$ e di $(p+q)\, D_2\mathcal{H}^*$ è 0, la (5.52) è ovviamente verificata all'ordine 0. Supponiamo per induzione che la (5.52) sia verificata fino all'ordine $n-1$ e dimostriamola per l'ordine n; cioè assumiamo[9] che

$$\begin{array}{ll} |\,(D_1\mathcal{X}+\Delta\mathcal{X})_{hk}\,| \le M_{hk} & |\,(D_1\mathcal{Y}+\Delta\mathcal{Y})_{hk}\,| \le M_{hk} \\ |\,((p+q)\,D_2\mathcal{H}^*)_{hk}\,| \le M_{hk} & \forall h,k \text{ tc } 0 \le h+k \le n-1 \end{array} \tag{5.56}$$

e proviamo che

$$\begin{array}{ll} |\,(D_1\mathcal{X}+\Delta\mathcal{X})_{hk}\,| \le M_{hk} & |\,(D_1\mathcal{Y}+\Delta\mathcal{Y})_{hk}\,| \le M_{hk} \\ |\,((p+q)\,D_2\mathcal{H}^*)_{hk}\,| \le M_{hk} & \forall h,k \text{ tc } h+k = n \end{array} \tag{5.57}$$

La prima delle (5.56) dice

$$\begin{array}{rl} |(D_1D_2X^*)_{hk}| = |(h-k)\mathcal{X}_{hk}| \le M_{hk} & \text{se } h \ne k \\ |\mathcal{X}_{kk}| \le M_{kk} & \forall h,k \text{ tc } 0 \le h+k \le n-1 \end{array} \tag{5.58}$$

da cui

$$|\mathcal{X}_{hk}| \le M_{hk} \qquad \forall h,k \text{ tc } 0 \le h+k \le n-1 \tag{5.59}$$

E in maniera analoga:

$$|(D_1D_2Y^*)_{hk}| \le M_{hk} \text{ e } |\mathcal{Y}_{hk}| \le M_{hk} \qquad \forall h,k \text{ tc } 0 \le h+k \le n-1 \tag{5.60}$$

[9] Si ha $M_{hk} \ge 0$ $\forall h,k$, in quanto $\zeta_j \ge 0$ $\forall j$. Ciò si dimostra in questo modo: per definizione di ζ si ha

$$\begin{array}{rcl} 0 &=& \kappa\zeta(1-cs-cs\zeta) - 4cs(1+\zeta)^2 - 4\zeta^2 = \\ &=& (-\kappa cs - 4cs - 4)\zeta^2 + (\kappa - \kappa cs - 8cs)\zeta - 4cs \end{array}$$

da cui, scrivendo $\zeta(s) = \sum_{j\ge1} \zeta_j s^j$ e prendendo l'ordine 1, si ha $\kappa\zeta_1 - 4c = 0$, ovvero $\zeta_1 = 4c/\kappa \ge 0$. Supponiamo poi che $\zeta_i \ge 0$, $\forall 1 \le i \le j-1$. Prendendo l'ordine j si ha

$$(-\kappa c - 4c) \sum_{\substack{1\le l,m\le j-2 \\ l+m=j-1}} \zeta_l\zeta_m - 4 \sum_{\substack{1\le l,m\le j-1 \\ l+m=j}} \zeta_l\zeta_m + \kappa\zeta_j - (\kappa c + 8c)\zeta_{j-1} = 0$$

cioè

$$\zeta_j = \kappa^{-1}\left((\kappa c + 4c) \sum_{\substack{1\le l,m\le j-2 \\ l+m=j-1}} \zeta_l\zeta_m + 4 \sum_{\substack{1\le l,m\le j-1 \\ l+m=j}} \zeta_l\zeta_m + (\kappa c + 8c)\zeta_{j-1} \right) \ge 0$$

grazie all'ipotesi induttiva.

Poichè, ricordando (5.39), si ha $\mathcal{X}_{hk} = (h+k)X_{hk}$, dalla (5.59) si ha

$$\begin{array}{c} |(h-k)X_{hk}| \leq (h+k)\,|X_{hk}| = |\mathcal{X}_{hk}| \leq M_{hk} \quad \text{se } h \neq k \\ \forall h,k \ \text{ tc } \ 0 \leq h+k \leq n-1 \end{array} \tag{5.61}$$

e

$$\begin{array}{c} |2X_{hk}| \leq (h+k)\,|X_{hk}| = |\mathcal{X}_{hk}| \leq M_{hk} \\ \forall h,k \ \text{ tc } \ 2 \leq h+k \leq n-1 \end{array} \tag{5.62}$$

Le (5.61) e (5.62) implicano, ricordando le (5.39), che

$$\begin{array}{c} |(D_1 X^*)_{hk}| = |(h-k)X_{hk}| \leq M_{hk} \qquad |2X_{hk}| \leq M_{hk} \\ \forall h,k \ \text{ tc } \ 0 \leq h+k \leq n-1 \end{array} \tag{5.63}$$

Analogamente si ottiene

$$\begin{array}{c} |(D_1 Y^*)_{hk}| = |(h-k)Y_{hk}| \leq M_{hk} \qquad |2Y_{hk}| \leq M_{hk} \\ \forall h,k \ \text{ tc } \ 0 \leq h+k \leq n-1 \end{array} \tag{5.64}$$

Sia $h+k \leq n-1$ con $h = k+1$ l'ultima delle (5.56) dice che

$$\begin{aligned} M_{k+1,k} &\geq \left| \Big((p+q)D^2\mathcal{H}^*\Big)_{k+1,k} \right| = \qquad (5.65) \\ &= \left| \left(\sum_{i\geq 0} (D_2\mathcal{H}^*)_{ii} p^{i+1} q^i + \sum_{i \geq 0} (D_2\mathcal{H}^*)_{ii} p^i q^{i+1} \right)_{k+1,k} \right| = |(D_2\mathcal{H}^*)_{kk}| \end{aligned}$$

Abbiamo cosí:

$$\begin{aligned} |(D_2\mathcal{H}^*)_{kk}| &\leq M_{k+1,k} \overset{(5.49)}{=} \zeta_{2k} \binom{2k+1}{k} \overset{(5.50)}{=} \left(\frac{2M}{p+q}\right)_{kk} \cdot \frac{1}{2} \frac{\binom{2k+1}{k}}{\binom{2k}{k}} = \\ &= \left(\frac{2M}{p+q}\right)_{kk} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} \leq \left(\frac{2M}{p+q}\right)_{kk} \end{aligned}$$

ed essendo per costruzione $(D_2\mathcal{H}^*)_{hk} = 0$ se $h \neq k$ si ottiene

$$|(D_2\mathcal{H}^*)_{hk}| \leq \left(\frac{2M}{p+q}\right)_{hk} \qquad \forall 0 \leq h+k \leq n-1 \tag{5.66}$$

Il che implica anche (ricordando che $(\mathcal{H}^*)_{00} = 0$ per costruzione)

$$|(\mathcal{H}^*)_{hk}| \leq (h+k)\,|\mathcal{H}^*_{hk}| = |(D_2\mathcal{H}^*)_{hk}| \leq \left(\frac{M}{p+q}\right)_{hk} \qquad (5.67)$$
$$\forall h,k \ \text{ tc } \ 0 \leq h+k \leq n-1$$

Siano ora $h, k \in \mathbf{N}$ qualsiasi con $h+k=n$: ricordando (5.41), il secondo membro contiene solo termini a cui si applica l'ipotesi induttiva e i calcoli svolti fino alla precedente relazione.

Dalle (5.58), (5.63), (5.66) e (5.67) si ottiene[10]:

$$\begin{aligned} |\,(D_2(\mathcal{H}^*\ D_1X^*))_{hk}\,| &= |\,(D_2\mathcal{H}^*\ D_1X^* + \mathcal{H}^*\ D_1D_2X^*))_{hk}\,| \leq \\ &\leq |\,(D_2\mathcal{H}^*\ D_1X^*)_{hk}\,| + |\,(\mathcal{H}^*\ D_1D_2X^*))_{hk}\,| \leq \\ &\leq \left(\frac{2M}{p+q}\,M\right)_{hk} + \left(\frac{2M}{p+q}\,M\right)_{hk} = \\ &= \left(\frac{4M^2}{p+q}\right)_{hk} \end{aligned} \qquad (5.68)$$

Cosí:

$$\begin{aligned} &|\,\Big((p+\mathcal{X})\cdot\mathcal{P}^*_{xy}(X,Y) + (q+\mathcal{Y})\cdot\mathcal{P}^*_{yy}(X,Y) - \\ &-D_2(\mathcal{H}^*\ D_1X^*)\Big)_{hk}\,| \overset{(5.45),(5.59),(5.60)\text{ e }(5.68)}{\leq} \\ \leq\ &((p+M)\cdot\sigma(X+Y))_{hk} + ((q+M)\cdot\sigma(X+Y))_{hk} + \left(\frac{4M^2}{p+q}\right)_{hk} = \\ =\ &\left((p+q+2M)\cdot\sigma(p+q+X^*+Y^*) + \frac{4M^2}{p+q}\right)_{hk} \overset{(5.63)\text{ e }(5.64)}{\leq} \end{aligned}$$

[10]Utilizzando che: se $|A_{hk}| \leq \tilde{A}_{hk}$ e $|B_{hk}| \leq \tilde{B}_{hk}$ si ha:

$$\begin{aligned} |(AB)_{hk}| &= \left|\left(\sum_{h_1,h_2,k_1,k_2} A_{h_1k_1}B_{h_2k_2}p^{h_1+h_2}q^{k_1+k_2}\right)_{hk}\right| \leq \sum_{\substack{h_1+h_2=h\\k_1+k_2=k}} |A_{h_1k_1}|\,|B_{h_2k_2}| \leq \\ &\leq \sum_{\substack{h_1+h_2=h\\k_1+k_2=k}} \tilde{A}_{h_1k_1}\tilde{B}_{h_2k_2} = (\tilde{A}\tilde{B})_{hk} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \left(4\left((p+q+M)\cdot\sigma(p+q+M)+\frac{M^2}{p+q}\right)\right)_{hk} = \\
&= \left(4\left(\frac{c(p+q+M)^2}{1-c(p+q+M)}+\frac{M^2}{p+q}\right)\right)_{hk} \le \\
&\le \left(4\,\frac{c(p+q+M)+\dfrac{M^2}{p+q}}{1-c(p+q+M)}\right)_{hk} \stackrel{(5.48)}{=} \kappa M_{hk}
\end{aligned}
\tag{5.69}
$$

e con lo stesso procedimento:

$$
|\left((p+\mathcal{X})\cdot\mathcal{P}^*_{xx}(X,Y)+(q+\mathcal{Y})\cdot\mathcal{P}^*_{xy}(X,Y)-D_2(\mathcal{H}^*\,D_1Y^*)\right)_{hk}| \le \kappa M_{hk} \tag{5.70}
$$

Per la canonicità della trasformazione, abbiamo inoltre

$$
\begin{aligned}
1 &= \det\frac{\partial(X,Y)}{\partial(p,q)} = \partial_pX\partial_qY-\partial_qX\partial_pY = \\
&= (1+\partial_pX^*)(1+\partial_qY^*)-\partial_qX^*\partial_pY^* = \\
&= 1+\partial_pX^*+\partial_qY^*+\partial_pX^*\partial_qY^*-\partial_qX^*\partial_pY^*
\end{aligned}
$$

cioè

$$
\partial_pX^*+\partial_qY^* = \partial_qX^*\partial_pY^*-\partial_pX^*\partial_qY^* \tag{5.71}
$$

È poi un calcolo diretto verificare che, per tutte le funzioni $F(p,q)$ e $G(p,q)$ vale:

$$
D_2F\,D_1G-D_1F\,D_2G = 2pq(\partial_qF\partial_pG-\partial_pF\partial_qG) \tag{5.72}
$$

Per cui

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\tilde h+\tilde k\ge 2} 2X^*_{\tilde h\tilde k}\tilde h p^{\tilde h}q^{\tilde k+1} + \sum_{\tilde h+\tilde k\ge 2} 2Y^*_{\tilde h\tilde k}\tilde k p^{\tilde h+1}q^{\tilde k} = 2pq(\partial_pX^*+\partial_qY^*) \stackrel{(5.71)}{=} \\
&= 2pq(\partial_qX^*\partial_pY^*-\partial_pX^*\partial_qY^*) \stackrel{(5.72)}{=} D_2X^*\,D_1Y^*-D_1X^*\,D_2Y^* = \\
&= \mathcal{X}D_1Y^*-D_1X^*\mathcal{Y}
\end{aligned}
$$

Prendendo l'ordine $(\cdot)_{h,h}$ (con $h\ge 1$) si ottiene:

$$
2X^*_{h,h-1}h+2Y^*_{h-1,h}h = \sum_{\substack{a+c=h=b+d\\ a,b,c,d\ge 1}} (\mathcal{X}_{ab}(D_1Y^*)_{cd}-(D_1X^*)\mathcal{Y}_{cd})
$$

Quindi, $\forall h \geq 1$, tale che[11] $2h-1 \leq n$,

$$\begin{aligned}
& |hX^*_{h,h-1}| \overset{(5.40)}{=} |hX^*_{h,h-1} + hY^*_{h-1,h}| \leq \\
\leq\ & \frac{1}{2} \sum_{\substack{a+c=h=b+d \\ 1\leq a,b,c,d\leq h-1}} \left(|\mathcal{X}_{ab}|\,|(D_1Y^*)_{cd}| - |(D_1X^*)|\,|\mathcal{Y}_{cd}|\right) \overset{(5.59),(5.60),(5.63) \text{ e } (5.64)}{\leq} \\
\leq\ & \sum_{\substack{a+c=h=b+d \\ 1\leq a,b,c,d\leq h-1}} M_{ab}\, M_{cd} = (M^2)_{hh}
\end{aligned}$$

per cui

$$\begin{aligned}
|\mathcal{X}_{h,h-1}| &= (2h-1)\,|X^*_{h.h-1}| \leq 2|hX^*_{h,h-1}| \leq (M^2)_{hh} \overset{(5.51)}{\leq} \\
&\leq \left(\frac{\kappa}{4}(p+q)M\right)_{hh} = \frac{\kappa}{4}(M_{h-1,h} + M_{h,h-1}) \overset{(5.49)}{=} \\
&= \frac{\kappa}{4}\left(\zeta_{2h-2}\binom{2h-1}{h} + \zeta_{2h-2}\binom{2h-1}{h-1}\right) = \\
&= \frac{\kappa}{2}\,\zeta_{2h-2}\binom{2h-1}{h-1} \overset{(5.49)}{=} \frac{\kappa}{2}\, M_{h,h-1} \qquad (5.73)
\end{aligned}$$

Prendiamo $(\cdot)_{hk}$ della prima delle (5.37): in virtù di (5.69) si ha

$$|(\omega(D_1-1)\mathcal{X} + D_2(p\mathcal{H}^*))_{hk}| \leq \kappa M_{hk} \qquad (5.74)$$

e in maniera analoga, prendendo $(\cdot)_{hk}$ della seconda delle (5.37) e appellandosi a (5.70):

$$|(\omega(D_1+1)\mathcal{Y} - D_2(q\mathcal{H}^*))_{hk}| \leq \kappa M_{hk} \qquad (5.75)$$

D'altronde

$$\begin{aligned}
(D_2(q\mathcal{H}^*))_{hk} &= \left(\sum 2j\mathcal{H}^*_{2j}p^j q^{j+1}\right)_{hk} = \\
&= \begin{cases} 0 & \text{se } h-k+1 \neq 0 \\ 2h\mathcal{H}_{2h} & \text{se } h-k+1 = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

da cui, esplicitando la (5.75) otteniamo:

$$\kappa M_{hk} \geq |\omega(h-k+1)\mathcal{Y}_{hk} - (D_2(q\mathcal{H}^*))_{hk}| =$$

[11] La richiesta $2h-1 \leq n$ serve per poter applicare (5.59), (5.60), (5.63) e (5.64): in modo che $a+b \leq 2(h-1) \leq n-1$ e cosí anche $c+d \leq n-1$.

$$= \begin{cases} |\omega(h-k+1)\mathcal{Y}_{hk}| & \text{se } h-k+1 \neq 0 \\ (2h+1)\mathcal{H}^*_{2h} & \text{se } h-k+1 = 0 \end{cases} \tag{5.76}$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned}
|(D_1\mathcal{Y}+\Delta\mathcal{Y})_{hk}| &= \begin{cases} |h-k|\,|\mathcal{Y}_{hk}| & \text{se } h \neq k \\ |\mathcal{Y}_{hh}| & \text{se } h = k \end{cases} = \\
&= \begin{cases} (k-h)\,|\mathcal{Y}_{hk}| & \text{se } h < k \neq h+1 \\ (h-k)\,|\mathcal{Y}_{hk}| & \text{se } h > k \neq h+1 \\ |\mathcal{Y}_{h,h+1}| & \text{se } k = h+1 \\ |\mathcal{Y}_{hh}| & \text{se } h = k \end{cases} \overset{(5.40)}{\leq} \\
&\leq \begin{cases} (k-h+1)\,|\mathcal{Y}_{hk}| & \text{se } h < k \neq h+1 \\ (h-k+1)\,|\mathcal{Y}_{hk}| & \text{se } h > k \neq h+1 \\ 0 & \text{se } k = h+1 \\ |\mathcal{Y}_{hh}| & \text{se } h = k \end{cases} = \\
&= \begin{cases} |k-h+1|\,|Y_{hk}| & \text{se } h-k+1 \neq 0 \\ 0 & \text{se } h-k+1 = 0 \end{cases} \overset{(5.76)}{\leq} \\
&\leq \frac{\kappa}{|\omega|} M_{hk} \leq M_{hk}
\end{aligned} \tag{5.77}$$

Inoltre, esplicitando (5.74) si giunge a

$$\begin{aligned}
\kappa M_{hk} &\geq |\omega(h-k-1)\mathcal{X}_{hk} + (D_2(p\mathcal{H}^*))_{hk}| = \\
&= \begin{cases} \omega(h-k-1)\mathcal{X}_{hk} & \text{se } h-k-1 \neq 0 \\ (2k+1)\mathcal{H}^*_{2k} & \text{se } h-k-1 = 0 \end{cases}
\end{aligned} \tag{5.78}$$

Disegnando la funzione $x \in \mathbf{R} \longmapsto \dfrac{|x+1|}{|x-1|}$ si vede che

$$\frac{|x+1|}{|x-1|} \leq 3\,,\ \forall x \in \mathbf{N} - \{1\} \tag{5.79}$$

E allora:

$$\begin{aligned}
|(D_1\mathcal{X}+\Delta\mathcal{X})_{hk}| &= \begin{cases} (h-k)|\mathcal{X}_{hk}| & \text{se } h > k \\ (k-h)|\mathcal{X}_{hk}| & \text{se } h < k \\ |\mathcal{X}_{hh}| & \text{se } h = k \end{cases} \leq \\
&\leq \begin{cases} |\mathcal{X}_{h,h-1}| & \text{se } k = h-1 \\ (h-k+1)|\mathcal{X}_{hk}| & \text{se } h > k \neq h-1 \\ (k-h+1)|\mathcal{X}_{hk}| & \text{se } h < k \neq h-1 \\ |\mathcal{X}_{hh}| & \text{se } h = k \end{cases} =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{cases} |h-k+1|\,|\mathcal{X}_{hk}| & \text{se } h-k-1\neq 0 \\ |\mathcal{X}_{h,h-1}| & \text{se } h-k-1=0 \end{cases} \overset{(5.79)}{\leq} \\
&\leq \begin{cases} 3\,|h-k-1|\,|\mathcal{X}_{hk}| & \text{se } h-k-1\neq 0 \\ |\mathcal{X}_{h,h-1}| & \text{se } h-k-1=0 \end{cases} \overset{(5.73)\text{ e }(5.78)}{\leq} \\
&\leq \begin{cases} \dfrac{3\kappa}{|\omega|}M_{hk} & \text{se } h-k-1\neq 0 \\ \dfrac{\kappa}{2}M_{h,h-1} & \text{se } h-k-1=0 \end{cases} \leq M_{hk}
\end{aligned} \tag{5.80}
$$

E anche

$$
\begin{aligned}
\left|\left((p+q)\,D_2\mathcal{H}^*\right)_{hk}\right| &= \begin{cases} 2h\,\mathcal{H}^*_{2h} & \text{se } h-k+1=0 \\ 2k\,\mathcal{H}^*_{2k} & \text{se } h-k-1=0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \leq \\
&\leq \begin{cases} (2h+1)\,\mathcal{H}^*_{2h} & \text{se } h-k+1=0 \\ (2k+1)\,\mathcal{H}^*_{2k} & \text{se } h-k-1=0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \overset{(5.76)\text{ e }(5.78)}{\leq} \\
&\leq \kappa M_{hk} \leq M_{hk}
\end{aligned} \tag{5.81}
$$

Le (5.77), (5.80) e (5.81) completano il passo induttivo. □

Con il metodo dei maggioranti si ottiene facilmente una stima esplicita del raggio di convergenza.

Infatti, $\zeta(s)$ è analitica per s cosí piccolo da far sí che il discriminante dell'equazione di secondo grado (5.46) che definisce ζ resti positivo.

Esplicitamente, poichè

$$(-\kappa cs - 4cs - 4)\zeta^2 + (\kappa - \kappa cs - 8cs)\zeta - 4cs = 0$$

si ha che $\zeta(s)$ è analitica nelle vicinanze di $s = 0$ purchè s verifichi

$$
\begin{aligned}
0 &< (\kappa - \kappa cs - 8cs)^2 - 16cs(\kappa cs + 4cs + 4) = \\
&= \kappa^2 c^2 s^2 - 2\beta cs + \kappa^2
\end{aligned}
$$

avendo posto $\beta \equiv \kappa^2 + 8\kappa + 32$, cioè per

$$s < \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 - \kappa^4}}{\kappa^2 c} \equiv R$$

In questa maniera, se $|p|, |q| < R/2$ si ha che $|p+q| \leq R$, per cui $M(p,q) \equiv (p+q)\cdot\zeta(p+q)$ è analitica per $|p|, |q| < R/2$. Quindi la trasformazione canonica e la nuova hamiltoniana, in virtù delle (5.53), (5.54) e (5.55), sono analitiche per $|p|, |q| \leq R/4$.

Il Teorema precedente è valido, essenzialmente con la stessa dimostrazione, per hamiltoniane del tipo

$$H(x, y) = \omega xy + \sum_{\substack{n \geq 3 \\ h+k=n}} f_{hk}^n x^h y^k \tag{5.82}$$

con $\omega \neq 0$.

Inoltre, il risultato è valido, modificando leggermente la dimostrazione, anche per hamiltoniane dipendenti dal tempo, del tipo

$$H(x, y, t) = \omega xy + \sum_{\substack{n \geq 3 \\ h+k=n}} f_{hk}^n(t)\, x^h y^k$$

Per maggiori dettagli cfr. [M56].

Osserviamo che, nel caso di costante gravitazionale del pendolo piccola, la stima sul raggio di analiticità nel Teorema 5.1 nelle nuove variabili p e q è di ordine 1; per le corrispondenti vecchie variabili l'angolo varia di ordine 1, mentre l'azione è piccola. Quantitativamente:

Teorema 5.2 *Sia $\varepsilon > 0$ fissato. L'hamiltoniana del pendolo*

$$H(I, \varphi) = \frac{1}{2} I^2 + \varepsilon(\cos\varphi - 1)$$

viene mandata, tramite una trasformazione $(I, \varphi) = \Phi(p, q)$ che conserva la struttura canonica $(I, \varphi) \longleftrightarrow (p, q)$, definita nell'intorno dell'equilibrio $(0, 0)$, in un'hamiltoniana "puramente iperbolica"

$$\mathcal{H}(pq) = \sqrt{\varepsilon} pq + \sum_{n \geq 2} G_{2n} J^n$$

La trasformazione Φ e la nuova hamiltoniana $\mathcal{H}$ sono analitiche per

$$|p|,\ |q| \leq R$$

dove R è un'opportuna costante, indipendente da ε.

Se $(I, \varphi) \in \Phi\left([-R, R] \times [-R, R]\right)$ si ha

$$|I| \leq K_1 \sqrt{\varepsilon} \quad \text{e} \quad |\varphi| \leq K_2$$

con K_1 e $K_2 < 2\pi$ opportune costanti, indipendenti da ε.

DIM. La trasformazione

$$J \equiv \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} I \qquad\qquad\qquad \psi \equiv \varphi$$

pur non essendo canonica, conserva la struttura canonica: definendo

$$H^{[1]}(J,\psi) \equiv \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} H(\sqrt{\varepsilon} J,\psi)$$

le nuove equazoni di Hamilton sono $\dot{J} = -\partial_\psi H^{[1]}$ e $\dot{\psi} = \partial_J H^{[1]}$. Nel caso in questione

$$H^{[1]}(J,\psi) = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} J^2 + \sqrt{\varepsilon}(\cos\psi - 1)$$

Operiamo allora un riscalamento nei tempi $(A(\sqrt{\varepsilon}t),\ \alpha(\sqrt{\varepsilon}t)) \equiv (J(t),\ \psi(t))$; per la Proposizione 2.17, la nuova hamiltoniana è $H^{[2]}(A,\alpha) \equiv \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}} H^{[1]}(A,\alpha)$, ovvero

$$H^{[2]}(A,\alpha) = \frac{1}{2} A^2 + \cos\alpha - 1 \tag{5.83}$$

Applicando il Teorema 5.1 al sistema (5.83) esiste una trasformazione Ψ che conduce a una nuova hamiltoniana puramente iperbolica

$$H^{[3]}(PQ) = PQ + \sum_{n\geq 2} \Gamma_{2n}\,(PQ)^n$$

L' analiticità è garantita per $|P|, |Q| \leq R$, con R opportuno (ma indipendente da ε, giacchè in (5.83) la ε non compare!). Siano K_1 e K_2 tali che se $(A,\alpha) \in \Psi\,([-R,R]\times[-R,R])$ si abbia $|A| \leq K_1$ e $|\alpha| \leq K_2$. Se riscaliamo ancora una volta i tempi ponendo $(p(t/\sqrt{\varepsilon}),\ q(t/\sqrt{\varepsilon})) \equiv (P(t), Q(t))$ si giunge, ricordando la Proposizione 2.17, alla nuova hamiltoniana

$$\mathcal{H}(pq) = \sqrt{\varepsilon}\, pq + \sum_{n\geq 2} G_{2n}\,(pq)^n$$

con $G_{2n} \equiv \sqrt{\varepsilon}\,\Gamma_{2n}$. Per costruzione è $|p| = |P| \leq R$, $|q| = |Q| \leq R$. E ripercorrendo indietro le varie trasformazioni: $K_1 \geq |A| = |J| = |I|/\sqrt{\varepsilon}$ e $K_2 \geq |\alpha| = |\psi| = |\varphi|$. □

Un'altra generalizzazione del Teorema 5.1 è la seguente:

Teorema 5.3 *Sia* $\omega : \mathbf{R}^{N-1} \longrightarrow \mathbf{R}$, $\inf|\omega| > 0$. *L'hamiltoniana*

$$H(J,y,\psi,x) = h(J) + \omega(J)\,xy + \sum_{\substack{h+k=n\\ n\geq 3}} f^n_{hk}(J)\,x^h y^k$$

con $(J,y,\psi,x) \in \mathbf{R}^{N-1} \times \mathbf{R} \times \mathbf{T}^{N-1} \times \mathrm{S}^1$, $\inf|\omega| > 0$, *viene mandata, tramite una trasformazione che conserva la struttura canonica* $(J,y,\psi,x) \longleftrightarrow (I,p,\varphi,q)$ *definita nelle vicinanze di* $y = 0 = x$, *in un'hamiltoniana "parzialmente iperbolica"* $\mathcal{H}(I,pq)$ *tale che, indicando* $\zeta \equiv pq$, *si abbia* $\partial_\zeta \mathcal{H}(I,0) = \omega(I)$ *e,* $\forall \delta \in \mathbf{N}^{N-1}$, $\partial_I^\delta \mathcal{H}(I,0) = \partial_J^\delta h(I)$.

DIM. Fissiamo $J \in \mathbf{R}^{N-1}$. Ho mostrato in queste pagine (Teorema 5.1 e (5.82)) che esiste una trasformazione

$$p = p(y,x;J) \qquad\qquad q = q(y,x;J)$$

in modo che

$$\partial_y p\,\partial_x q - \partial_y q\,\partial_x p = 1 \tag{5.84}$$

e che fa sí che $H(J,y(p,q;J),\psi,x(p,q;J))$ dipenda solo da J e da pq.

Derivando rispetto a J la (5.84) si ottiene

$$\partial^2_{Jy} p\,\partial_x q + \partial_y p\,\partial^2_{Jx} q - \partial^2_{Jy} q\,\partial_x p - \partial_y q\,\partial^2_{Jx} p = 0 \tag{5.85}$$

Consideriamo quindi la forma differenziale (pensando la J fissata!)

$$\tau(y,x) \equiv (\partial_x p\,\partial_J q - \partial_J p\,\partial_x q)\,dx + (\partial_y p\,\partial_J q - \partial_J p\,\partial_y q)\,dy$$

Grazie a (5.85), τ è chiusa, quindi, per il Lemma di Poincarè, esiste una funzione $\Gamma(y,x;J)$ tale che

$$\begin{aligned} \partial_y \Gamma &= \partial_y p\,\partial_J q - \partial_J p\,\partial_y q \\ \partial_x \Gamma &= \partial_x p\,\partial_J q - \partial_J p\,\partial_x q \end{aligned} \tag{5.86}$$

Sia allora

$$(I,p,\varphi,q) = \Phi(J,y,\psi,x) \equiv (J,\ p(y,x;J),\ \psi + \Gamma(y,x;J),\ q(y,x;J))$$

In virtù di (5.84) e (5.86), $dI \wedge d\varphi + dp \wedge dq = dJ \wedge d\psi + dy \wedge dx$, cioè Φ è canonica. $\square$

6 Alcune condizioni di non degenerazione

Diamo ora alcune condizioni di non degenerazione sull'hamiltoniana

$$H(I,\varphi) = h(I) + \varepsilon f(I,\varphi;\varepsilon)$$

Definizione 6.1 [1] *h si dice* **non degenere** *su $V \subseteq \mathbf{R}^N$ se*

$$\det \frac{\partial^2 h}{\partial I^2} \neq 0$$

h si dice **isoenergeticamente non degenere** *se*

$$\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 h}{\partial I^2} & \dfrac{\partial h}{\partial I} \\ \dfrac{\partial h}{\partial I} & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \qquad \forall I \in V$$

La condizione di non degenerazione è equivalente a

$$\det \frac{\partial \omega}{\partial I}$$

avendo posto $\omega(I) \equiv h'(I)$; è quindi possibile, nel caso non risonante e completamente integrabile, "numerare" i tori $\{I_0\} \times \mathbf{T}^N$ con le frequenze, esplicitando le I rispetto alle ω.

Per quanto riguarda la non degenerazione isoenergetica, abbiamo la seguente

Proposizione 6.2 *Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1.
$$\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 h}{\partial I^2} & \dfrac{\partial h}{\partial I} \\ \dfrac{\partial h}{\partial I} & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$
sulla superficie di livello $\{h = E\}$.

[1] "Una buona definizione dovrebbe essere l'ipotesi di un teorema." (J. Glimm)

2. *$\omega \neq 0$ sulla superficie di livello $\{h = E\}$ e, supponendo per fissare le idee $\omega_N \neq 0$, si ha*
$$\det \frac{\partial \alpha}{\partial \tilde{I}} \neq 0$$
dove: $\tilde{I} \equiv (I_1, \dots, I_{N-1})$, $\tilde{\omega} \equiv (\omega_1, \dots, \omega_{N-1})$,
$$\alpha \equiv \frac{\tilde{\omega}(\tilde{I}, I_N(\tilde{I}))}{\omega_N(\tilde{I}, I_N(\tilde{I}))}$$
e $h(\tilde{I}, I_N(\tilde{I})) = E$.

3.
$$\begin{array}{rcl} G : \mathbf{R}^N \times \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}^N \times \mathbf{R} \\ (I, \lambda) & \longmapsto & (\lambda\, \omega(I), h(I)) \end{array}$$
è un diffeomorfismo vicino a $I = I_0$, $\lambda = 1$.

DIM. Si ha:
$$\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 h}{\partial I^2} & \dfrac{\partial h}{\partial I} \\ \dfrac{\partial h}{\partial I} & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow 0 \neq \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 h}{\partial I^2} & \dfrac{\partial h}{\partial I} \\ \dfrac{\partial h}{\partial I} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_I \omega x + a\omega \\ \omega \cdot x \end{pmatrix} \qquad \forall \begin{pmatrix} x \\ a \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R} - \{0\} \Longleftrightarrow$$
$\Longleftrightarrow$ se $x \in \mathbf{R}^N - \{0\}$ è tale che $\omega \cdot x = 0$, allora $\partial_I \omega x + a\omega \neq 0\ \ \forall a \in \mathbf{R}$ $\Longleftrightarrow$ se $x \in \mathbf{R}^N - \{0\}$ è tale che $\omega \cdot x = 0$ e $\partial_I \omega_N x + a\omega_N = 0$ allora $\partial_I \tilde{\omega} x + a\tilde{\omega} \neq 0\ \ \forall a \in \mathbf{R} \Longleftrightarrow$ (ponendo $a \equiv -\omega_N^{-1} \partial_I \omega_N\, x$) se $x \in \mathbf{R}^N - \{0\}$ è tale che $\omega \cdot x = 0$, allora
$$\omega_N \partial_I \tilde{\omega}\, x - (\partial_I \omega_N\, x)\tilde{\omega} \neq 0$$
$\Longleftrightarrow$ (ponendo $\tilde{x} \equiv (x_1, \dots, x_{N-1})$ e $x_N = -\omega_N^{-1} \tilde{\omega} \cdot x$) se $\tilde{x} \neq 0$ allora
$$0 \neq \omega_N \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \tilde{I}} \tilde{x} - \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial I_N} \tilde{\omega} \cdot \tilde{x} - \tilde{\omega} \frac{\partial \omega_N}{\partial \tilde{I}} x + \tilde{\omega} \frac{1}{\omega_N} \frac{\partial \omega_N}{\partial I_N} \tilde{\omega} \cdot \tilde{x} = \omega_N^2 \frac{\partial \alpha}{\partial \tilde{I}} \tilde{x}$$

(avendo usato che $d_{\tilde{I}} I_N = -\omega_N^{-1} \tilde{\omega}$)

$$\iff \det \frac{\partial \alpha}{\partial \tilde{I}} \neq 0$$

E la prima condizione è equivalente alla terza per il Teorema del Dini. $\square$

Proposizione 6.3 *Consideriamo l'hamiltoniana $h(I)$ con $I \in V \subseteq \mathbf{R}^N$ e sia $\omega(I) \equiv h'(I)$. Sia $N \geq 2$ e supponiamo $\omega_N \neq 0$. Denotiamo con il suffisso "tilde" la proiezione sulle prime $N-1$ componenti e con $I_N(\tilde{I})$ la funzione (la cui esistenza e unicità è garantita dal Dini) tale che $h(\tilde{I}, I_N(\tilde{I})) = E$. Allora*

$$\det \partial^2_{\tilde{I}} I_N = (-1)^N \, \omega_N^{-N-1} \, \det \begin{pmatrix} h'' & \omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$$

DIM. Si ha

$$\partial_{\tilde{I}_k \tilde{I}_j} I_N = \frac{\tilde{\omega}_j (\omega_N \, \partial^2_{\tilde{I}_k I_N} h - \partial^2_{I_N} h \, \tilde{\omega}_k) - \omega_N \, (\omega_N \, \partial^2_{\tilde{I}_k \tilde{I}_j} h - \tilde{\omega}_k \, \partial^2_{\tilde{I}_j I_N} h)}{\omega_N^3}$$

ovvero, con la definizione di "prodotto $*$" data dalla (A.1),

$$\omega_N^3 \, \partial^2_{\tilde{I}} I_N = (\omega_N \, \partial^2_{\tilde{I} I_N} h - \partial^2_{I_N} h \, \tilde{\omega}) * \tilde{\omega} - \omega_N \, (\omega_N \, \partial^2_{\tilde{I}} h - \tilde{\omega} * \partial^2_{\tilde{I} I_N} h)$$

Usando quindi la Proposizione A.2:

$$\begin{aligned}
& (\omega_N^3)^{N-1} \det \partial^2_{\tilde{I}} I_N = \det(\omega_N^3 \, \partial^2_{\tilde{I}} I_N) = \\
= \; & \det[(\omega_N \, \partial^2_{\tilde{I} I_N} h - \partial^2_{I_N} h \, \tilde{\omega}) * \tilde{\omega} - \omega_N \, (\omega_N \, \partial^2_{\tilde{I}} h - \tilde{\omega} * \partial^2_{\tilde{I} I_N} h)] = \\
= \; & (-\omega_N^2)^{N-2} \det \begin{pmatrix} \partial^2_{\tilde{I}} h & \partial^2_{\tilde{I} I_N} h & \tilde{\omega} \\ \partial^2_{\tilde{I} I_N} h & \partial^2_{I_N} h & \omega_N \\ \tilde{\omega} & \omega_N & 0 \end{pmatrix} = \\
= \; & (-1)^{N-2} \, \omega_N^{2(N-2)} \, \det \begin{pmatrix} h'' & \omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

che prova l'asserto. $\square$

Si osservi che la Proposizione 6.3 fornisce un'altra dimostrazione della Proposizione 6.2: infatti, essendo

$$\partial_{\tilde{I}} I_N(\tilde{I}) = -\frac{\tilde{\omega}(\tilde{I}, I_N(\tilde{I}))}{\omega_N(\tilde{I}, I_N(\tilde{I}))} = -\alpha(\tilde{I})$$

per cui la Proposizione 6.3 si scrive:

$$-\,\omega_N^{-N-1} \det \begin{pmatrix} h'' & \omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} = \det \partial_{\tilde{I}} \alpha \tag{6.1}$$

il che prova che le prime due affermazioni contenute nella Proposizione 6.2 sono equivalenti.

Le condizioni di non degenerazione e di non degenerazione isoenergetica sono distinte: $(I_1^2 + I_2^2)/2$ è non degenere ma isoenergeticamente degenere su $I_1 = I_2 = 0$, mentre $I_1^2 + I_2$ è degenere ma isoenergeticamente non degenere.

Vale tuttavia la seguente

Proposizione 6.4 *Se* $\det A \neq 0$ *allora*

$$\det \begin{pmatrix} A & v \\ v & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \Longleftrightarrow v \cdot A^{-1} v \neq 0$$

In particolare: se h è non degenere, allora h è isoenergeticamente non degenere se e solo se

$$\frac{\partial h}{\partial I} \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial^2 I} \frac{\partial h}{\partial I} \neq 0$$

DIM. Se fosse $v \cdot A^{-1} v = 0$, avrei

$$\begin{pmatrix} A & v \\ v & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -A^{-1} v \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

che mostra

$$\det \begin{pmatrix} A & v \\ v & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Viceversa: se $v \cdot A^{-1} v \neq 0$, mostro che $\forall (y, t) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}$ trovo una soluzione $(x, s) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}$ di

$$\begin{pmatrix} A & v \\ v & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ t \end{pmatrix}$$

Tale soluzione è

$$s = \frac{v \cdot A^{-1} y - t}{v \cdot A^{-1} v} \qquad\qquad x = A^{-1} y - s\, A^{-1} v \qquad \square$$

Parte II
Catene di transizione e forme normali per tori parzialmente iperbolici

7 Intersezioni trasverse e catene di transizione

Definizione 7.1 *Un toro $\mathcal{T}$ si dice* **toro coi baffi** *se $\mathcal{T}$ è una componente connessa dell'intersezione di due varietà W^s e W^u invarianti per il flusso di fase e tali che*

- $\forall x \in W^s, \ \operatorname{dist}(\Phi^t(x), \mathcal{T}) \xrightarrow{t \longrightarrow \infty} 0$
- $\forall x \in W^u, \ \operatorname{dist}(\Phi^t(x), \mathcal{T}) \xrightarrow{t \longrightarrow -\infty} 0$

Definizione 7.2 *Siano $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ due sottovarietà della varietà X. Si dice che $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ sono* **trasverse** *nel punto p rispetto allo spazio ambiente X se $p \in \mathcal{M} \cap \mathcal{N}$ e $T_p\mathcal{M} + T_p\mathcal{N} = T_pX$.*

Definizione 7.3 *Un* **toro di transizione** *è un toro coi baffi $\mathcal{T}$ con la seguente proprietà: il flusso di fase di un qualsiasi intorno di un qualsiasi punto del baffo in arrivo W^s è di ostruzione per il baffo in partenza W^u in ogni suo punto, nel senso che: $\forall \xi^s \in W^s$, $\forall \xi^u \in W^u$, $\forall \mathcal{N}$ trasversa a W^u in ξ^u tale che $H(W^s) = H(W^u) = H(\mathcal{T}) = H(\mathcal{N})$ $\forall U$ intorno di ξ^s, $\exists t$ tale che $\Phi^t_H(U) \cap \mathcal{N} \neq \emptyset$.*

Definizione 7.4 *Assumiamo che il sistema abbia $\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_i, \ldots$ tori di transizione. Si dice che essi costituiscono una* **catena di transizione** *se il baffo in partenza W^u_{i-1} di $\mathcal{T}_{i-1}$ interseca trasversalmente il baffo in arrivo W^s_i di $\mathcal{T}_i$.*

L'esistenza di una catena di transizione con tori "lontani" mostra che il sistema non è stabile, in virtù del seguente

Teorema 7.5 *Se $\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_i, \ldots$ è una catena di transizione per il sistema allora ogni intorno di $\mathcal{T}_1$ è connesso con un qualsiasi intorno di $\mathcal{T}_i$ da una traiettoria di fase: cioè $\forall V_1$ intorno di $\mathcal{T}_1$ e $\forall V_i$ intorno di $\mathcal{T}_i$, $\exists x \in V_1, t \in [0, \infty)$ cosí che $\Phi^t(x) \in V_i$.*

DIM. Siano V_1 intorno di $\mathcal{T}_1$,..., V_i intorno di $\mathcal{T}_i$. Siano η_j, $1 \leq j \leq i$ intersezioni trasverse tra W^u_j e W^s_{j+1}. Sia $\xi_0 \in W^s_1 \cap V_1$, e sia U_0 un intorno in modo che $\xi_0 \in U_0 \subset V_1$. Essendo W^s_2 trasversa a W^u_1 e poichè W^s_1 ostruisce

W_1^u, deve esistere un tempo t_1 per il quale $\Phi^{t_1}(U_0) \cap W_2^s \neq \emptyset$. Siano quindi $U_1 \equiv \Phi^{t_1}(U_0)$ e prendiamo un punto $\xi_1 \in U_1 \cap W_2^s$.

Iterando l'argomento: dato $\xi_{j-1} \in U_{j-1} \cap W_j^s$ si ottiene l'esistenza di un tempo t_j per cui $\Phi^{t_j}(U_{j-1}) \cap W_{j+1}^s \neq \emptyset$. Cioè esiste un punto $\xi_j \in \Phi^{t_j}(U_{j-1}) \cap W_{j+1}^s$.

Perciò $\exists \xi_{i-1} \in \Phi^{t_{i-1}}(U_{i-2}) \cap W_i^s$, ovvero, posto $\tau \equiv t_1 + \ldots + t_{i-1}$, $\xi_{i-1} \in \Phi^\tau(U_0) \cap W_i^s$.

Poichè W_i^s tende a $\mathcal{T}_i$ per $t \longrightarrow \infty$, $\exists \overline{\tau}$ per cui $\xi_i \equiv \Phi^{\overline{\tau}}(\xi_{i-1}) \in V_i$. E per costruzione $\xi_i \in \Phi^{\tau+\overline{\tau}}(U_0)$. $\square$

Diamo ora una caratterizzazione della trasversalità nei sistemi hamiltoniani:

Lemma 7.6 *Siano $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$ sottovarietà di X. Supponiamo che $\mathcal{L}$ sia trasversa a $\mathcal{M}$ nel punto p rispetto allo spazio ambiente X e che $\mathcal{L} \cap \mathcal{M}$ e $\mathcal{L} \cap \mathcal{N}$ siano trasverse in p rispetto a $\mathcal{L}$.*

Allora $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ sono trasverse nel punto p rispetto allo spazio ambiente X.

DIM. Certo $p \in \mathcal{L} \cap \mathcal{M} \cap \mathcal{N}$ grazie alla seconda condizione di trasversalità. Essa mostra anche che:

$$T_p\mathcal{L} = T_p(\mathcal{L} \cap \mathcal{M}) + T_p(\mathcal{L} \cap \mathcal{N}) \subseteq T_p\mathcal{M} + T_p\mathcal{N} \tag{7.1}$$

per cui, utilizzando la prima condizione di trasversalità:

$$T_pX = T_p\mathcal{L} + T_p\mathcal{M} \subseteq T_p\mathcal{M} + T_p\mathcal{N} + T_p\mathcal{M} = T_p\mathcal{M} + T_p\mathcal{N} \tag{7.2}$$

e, d'altra parte, ovviamente $T_p\mathcal{M} + T_p\mathcal{N} \subseteq T_pX$. $\square$

Osserviamo, per inciso, che **non** è vero che se $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ sono a due a due trasverse in X allora $\mathcal{L} \cap \mathcal{M}$ e $\mathcal{L} \cap \mathcal{N}$ sono trasverse in $\mathcal{L}$: basta considerare, per esempio, tre rette passanti per l'origine in $X \equiv \mathbf{R}^2$.

Teorema 7.7 *Sia $H(I, p, \varphi, q)$ funzione liscia di $I \in \mathbf{R}^{N-1}$, $p \in \mathbf{R}$, $\varphi \in \mathbf{T}^{N-1}$, $q \in \mathbf{R}$. Siano $W^{[1]}$ e $W^{[2]}$ due grafici contenuti in una superficie di energia fissata E:*

$$W^{[i]} = \{(I^{[i]}(\varphi, q), p^{[i]}(\varphi, q), \varphi, q) : \ \varphi \in \mathbf{T}^{N-1}, |q - q_0| < a\} \qquad i = 1, 2$$

con $W^{[1]}, W^{[2]} \subset \{H = E\}$.

Assumiamo che $W^{[1]}$ e $W^{[2]}$ si intersechino in un punto z_0:

$$\begin{aligned} z_0 &= \{(I^{[1]}(\varphi_0, q_0), p^{[1]}(\varphi_0, q_0), \varphi_0, q_0)\} = \\ &= \{(I^{[2]}(\varphi_0, q_0), p^{[2]}(\varphi_0, q_0), \varphi_0, q_0)\} \in W^{[1]} \cap W^{[2]} \end{aligned} \tag{7.3}$$

Supponiamo inoltre che $\partial_p H(z_0) \neq 0$ e che almeno una tra $W^{[1]}$ e $W^{[2]}$ intersechi trasversalmente $S_{q_0} \equiv \{(I, p, \varphi, q_0)\}$ in z_0.

Allora: $W^{[1]}$ e $W^{[2]}$ si intersecano trasversalmente in z_0 se e solo se

$$\det \frac{\partial(I^{[1]}(\varphi, q_0) - I^{[2]}(\varphi, q_0))}{\partial \varphi}\bigg|_{\varphi=\varphi_0} \neq 0 \tag{7.4}$$

DIM. Assumiamo che valga (7.4). Una base per $T_{z_0}(W^{[i]} \cap S_{q_0})$, $i = 1, 2$, è:

$$\left\{ \begin{pmatrix} \partial_{\varphi_k} I^{[i]}(\varphi_0, q_0) \\ \partial_{\varphi_k} p^{[i]}(\varphi_0, q_0) \\ e_k \\ 0 \end{pmatrix}, \ k = 1, \ldots, N-1 \right\}$$

dove[1] $\{e_1, \ldots, e_{N-1}\}$ è la base canonica di $\mathbf{R}^{N-1}$.

Osserviamo inoltre che derivando $H(I^{[i]}(\varphi, q_0), p^{[i]}(\varphi, q_0), \varphi, q_0) = E$ si ottiene

$$\frac{\partial H}{\partial I} \cdot \frac{\partial I^{[i]}}{\partial \varphi_k} + \frac{\partial H}{\partial p} \cdot \frac{\partial p^{[i]}}{\partial \varphi_k} + \frac{\partial H}{\partial \varphi_k} = 0 \tag{7.5}$$

da cui, poichè $\partial_p H(z_0) \neq 0$:

$$\partial_{\varphi_k} p^{[i]}(\varphi_0, q_0) = -\left(\partial_p H(z_0)\right)^{-1} \ \left(\partial_I H(z_0) \cdot \partial_{\varphi_k} I^{[i]}(\varphi_0, q_0) + \partial_{\varphi_k} H(z_0)\right)$$

$$\partial_{\varphi_k}(p^{[1]} - p^{[2]})(\varphi_0, q_0) = \beta \cdot \partial_{\varphi_k}(I^{[1]} - I^{[2]})$$

avendo posto $\beta \equiv -(\partial_p H(z_0))^{-1} \partial_I H(z_0)$.

Da ciò otteniamo: $T_{z_0}(W^{[1]} \cap S_{q_0}) + T_{z_0}(W^{[2]} \cap S_{q_0}) = T_{z_0} S_{q_0} \iff$

$$\iff 2(N-1) = \mathrm{Ran} \begin{pmatrix} \partial_\varphi I^{[1]} & \partial_\varphi I^{[2]} \\ \partial_\varphi p^{[1]} & \partial_\varphi p^{[2]} \\ I_{N-1} & I_{N-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Ran} \begin{pmatrix} \partial_\varphi (I^{[1]} - I^{[2]}) & \partial_\varphi I^{[2]} \\ \partial_\varphi (p^{[1]} - p^{[2]}) & \partial_\varphi p^{[2]} \\ 0_{N-1} & I_{N-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

[1]Poichè $v \in T_{z_0}(W^{[i]} \cap S_{q_0}) \iff v = \alpha'(0)$ dove $\alpha : [-1, 1] \longrightarrow W^{[i]} \cap S_{q_0}$ con $\alpha(0) = z_0 \iff v = \alpha'(0)$ con $\alpha(t) = (I^{[i]}(\varphi(t), q_0), p^{[i]}(\varphi(t), q_0), \varphi(t), q_0)$ con $\varphi(0) = \varphi_0 \iff v = (\partial_\varphi I^{[i]}(\varphi_0, q_0) \cdot \varphi'(0), \partial_\varphi p^{[i]}(\varphi(t), q_0) \cdot \varphi'(0), \varphi'(0), 0) \iff v = \sum_{1 \le k \le N-1} c_k (\partial_{\varphi_k} I^{[i]}(\varphi_0, q_0), \partial_{\varphi_k} p^{[i]}(\varphi_0, q_0), e_k, 0)$.

$$= \text{Ran}\begin{pmatrix} \partial_\varphi(I^{[1]}-I^{[2]}) & \partial_\varphi I^{[2]} \\ \partial_\varphi(p^{[1]}-p^{[2]}) & \partial_\varphi p^{[2]} \\ 0_{N-1} & I_{N-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \text{Ran}\begin{pmatrix} \partial_\varphi(I^{[1]}-I^{[2]}) & \partial_\varphi I^{[2]} \\ \beta\cdot\partial_\varphi(I^{[1]}-I^{[2]}) & \beta\cdot\partial_\varphi I^{[2]} - (\partial_p H(z_0))^{-1}\partial_\varphi H(z_0) \\ 0_{N-1} & I_{N-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \text{Ran}\begin{pmatrix} \partial_\varphi(I^{[1]}-I^{[2]}) & \partial_\varphi I^{[2]} \\ 0_{1\times(N-1)} & * \\ 0_{N-1} & I_{N-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \text{Ran}\begin{pmatrix} \partial_\varphi(I^{[1]}-I^{[2]}) & \partial_\varphi I^{[2]} \\ 0_{N-1} & I_{N-1} \end{pmatrix} = \text{Ran}\,\partial_\varphi(I^{[1]}-I^{[2]}) + N - 1 \iff$$

$\iff \partial_\varphi(I^{[1]}-I^{[2]})$ ha rango massimo[2].

Perciò la (7.4) è equivalente all'intersezione trasversa tra $W^{[1]}\cap S_{q_0}$ e $W^{[2]}\cap S_{q_0}$ in z_0 rispetto a S_{q_0}. Per il Lemma precedente, ciò garantisce l'intersezione trasversa tra $W^{[1]}$ e $W^{[2]}$ in z_0 rispetto allo spazio ambiente X.

---

[2]Ho usato il fatto che, se $A \in \text{Mat}(n\times n)$, $B \in \text{Mat}(n\times m)$

$$\text{Ran}\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{m\times n} & I_m \end{pmatrix} = \text{Ran}\,A + m$$

Ciò può essere dimostrato osservando che

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \text{Ker}\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{m\times n} & I_m \end{pmatrix} & \longrightarrow & \text{Ker}\,A \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & x \end{array}$$

(dove $x \in \mathbf{R}^n$, $y \in \mathbf{R}^m$) è un isomorfismo. Da ciò:

$$\text{Ran}\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{m\times n} & I_m \end{pmatrix} = a + b - \dim\,\text{Ker}\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{m\times n} & I_m \end{pmatrix} =$$

$$= \text{Ran}\,A + \dim\,\text{Ker}\,A + b - \dim\,\text{Ker}\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{m\times n} & I_m \end{pmatrix} = \text{Ran}\,A + b$$

Viceversa, assumiamo che $W^{[1]}$ e $W^{[2]}$ si intersechino trasversalmente. Poichè una base per[3] $T_{z_0}W^{[i]}$ è

$$\left\{ \begin{pmatrix} \partial_q I^{[i]}(\varphi_0, q_0) \\ \partial_q p^{[i]}(\varphi_0, q_0) \\ 0_{(N-1)\times 1} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_{\varphi_k} I^{[i]}(\varphi_0, q_0) \\ \partial_{\varphi_k} p^{[i]}(\varphi_0, q_0) \\ e_k \\ 0 \end{pmatrix}, \ k = 1, \dots, N-1 \right\}$$

Perciò, dall'intersezione trasversa tra $W^{[1]}$ e $W^{[2]}$:

$$2N = \text{Ran} \begin{pmatrix} \partial_\varphi I^{[1]} & \partial_q I^{[1]} & \partial_\varphi I^{[2]} & \partial_q I^{[2]} \\ \partial_\varphi p^{[1]} & \partial_q p^{[1]} & \partial_\varphi p^{[2]} & \partial_q p^{[2]} \\ I_{N-1} & 0_{(N-1)\times 1} & I_{N-1} & 0_{(N-1)\times 1} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \text{Ran} \begin{pmatrix} \partial_\varphi (I^{[1]} - I^{[2]}) & \partial_q (I^{[1]} - I^{[2]}) & \partial_\varphi I^{[2]} & \partial_q I^{[2]} \\ \partial_\varphi (p^{[1]} - p^{[2]}) & \partial_q (p^{[1]} - p^{[2]}) & \partial_\varphi p^{[2]} & \partial_q p^{[2]} \\ \multicolumn{2}{c}{0_N} & \multicolumn{2}{c}{I_N} \end{pmatrix} =$$

$$= N + \text{Ran} \begin{pmatrix} \partial_\varphi (I^{[1]} - I^{[2]}) & \partial_q (I^{[1]} - I^{[2]}) \\ \partial_\varphi (p^{[1]} - p^{[2]}) & \partial_q (p^{[1]} - p^{[2]}) \end{pmatrix} =$$

$$= N + \text{Ran} \begin{pmatrix} \partial_\varphi (I^{[1]} - I^{[2]}) & \partial_q (I^{[1]} - I^{[2]}) \\ \beta \cdot \partial_\varphi (I^{[1]} - I^{[2]}) & \partial_q (p^{[1]} - p^{[2]}) \end{pmatrix} =$$

$$N + \text{Ran} \begin{pmatrix} \partial_\varphi (I^{[1]} - I^{[2]}) & \partial_q (I^{[1]} - I^{[2]}) \\ 0_{1\times N-1} & * \end{pmatrix}$$

cioè $\text{Ran} \begin{pmatrix} \partial_\varphi (I^{[1]} - I^{[2]}) & \partial_q (I^{[1]} - I^{[2]}) \\ 0_{1\times N-1} & * \end{pmatrix} = N$, per cui

$$0 \neq \det \begin{pmatrix} \partial_\varphi (I^{[1]} - I^{[2]}) & \partial_q (I^{[1]} - I^{[2]}) \\ 0_{1\times N-1} & * \end{pmatrix} = \pm * \cdot \det \partial_\varphi (I^{[1]} - I^{[2]})$$

che mostra $\det \partial_\varphi (I^{[1]} - I^{[2]}) \neq 0$. □

Un esempio di toro coi baffi è il toro standard dell'Appendice F.

[3] Dato che $v \in T_{z_0}W^{[i]} \iff v = \alpha'(0)$ dove $\alpha : [-1,1] \longrightarrow W^{[i]}$ con $\alpha(0) = z_0 \iff v = \alpha'(0)$ con $\alpha(t) = (I^{[i]}(\varphi(t), q(t)), p^{[i]}(\varphi(t), q(t)), \varphi(t), q(t)) \iff v = (\partial_\varphi I^{[i]}(\varphi_0, q_0) \cdot \varphi'(0) + \partial_q I^{[i]}(\varphi_0, q_0) \cdot q'(0), \partial_\varphi p^{[i]}(\varphi(t), q_0) \cdot \varphi'(0) + \partial_q p^{[i]}(\varphi_0, q_0) \cdot q'(0), \varphi'(0), q'(0)) \iff v = \sum_{1\leq k\leq N-1} c_k (\partial_{\varphi_k} I^{[i]}(\varphi_0, q_0), \partial_{\varphi_k} p^{[i]}(\varphi_0, q_0), e_k, 0) + c_n (\partial_q I^{[i]}(\varphi_0, q_0), \partial_q p^{[i]}(\varphi_0, q_0), 0, 1)$.

8 Conservazione e proprietà dei tori parzialmente iperbolici sotto piccole perturbazioni

8.1 Un Teorema KAM

Fissato $I_0 \in \mathbf{R}^{\ell-1}$, l'hamiltoniana

$$h(I,pq) \qquad (I,\varphi,p,q) \in \mathbf{R}^{\ell-1} \times \mathbf{T}^{\ell-1} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R},\ |p| \le R,\ |q| \le R$$

ammette il toro

$$\mathcal{T} \equiv \{(I_0,\varphi,0,0),\ \varphi \in \mathbf{T}^{\ell-1}\}$$

come toro invariante. Se poi $\mathcal{I}(s)$ è una curva qualsiasi, con $\mathcal{I}(0) = I_0$, $\mathcal{T}$ è contenuto nella superficie $\mathcal{S}$, invariante per tempi brevi[1],

$$\mathcal{S} \equiv \{(\mathcal{I}(pq),\varphi,p,q),\ \varphi \in \mathbf{T}^{\ell-1},\ |p| \le R,\ |q| \le R\}$$

su cui il moto è:

$$\begin{aligned}\Phi_h^t(\mathcal{I}(pq),\varphi,p,q) \;&=\; \big(\mathcal{I}(pq),\varphi + \partial h(\mathcal{I}(pq),pq)\cdot t,\\ &\qquad pe^{-\partial_\zeta h(\mathcal{I}(pq),pq)t},\, qe^{\partial_\zeta h(\mathcal{I}(pq),pq)t}\big)\end{aligned}$$

avendo denotato con ζ il prodotto delle variabili p e q. Il Teorema 8.1 mostrerà che la maggior parte di questi tori si conservano sotto piccole perturbazioni e che anche le superfici si conservano, a patto di scegliere una curva opportuna.

Il Teorema 8.1 è essenzialmente il Lemma 1 di [CG94] (e anche il Teorema 3.1 di [RW97], che però è a frequenza fissata anzichè ad energia fissata). La strategia dimostrativa che seguo è in parte diversa da [CG94]:

- Uso le Trasformazioni di Lie al posto delle funzioni generatrici, come in [RW97].
- Ottengo una relazione tra la costante di diofantinità γ e la taglia della perturbazione θ_0 del tipo di quella ottenuta da [N82] e [P82] per il Teorema KAM classico: la (8.1) mostra che si può prendere $\gamma = O(\sqrt{\theta_0})$. Con questo, faccio una stima della misura dell'insieme dei tori conservati, data dalla (8.5): i "buchi" sui quali il Teorema non vale sono non più grandi di $O(\sqrt{\theta_0})$.

[1] Cioè finchè non si esce dal dominio $|p|$, $|q| \le R$.

- Estendo in maniera liscia le funzioni definite su insiemi di Cantor senza invocare il Teorema di Whitney, ma, seguendo un'idea di [C90], utilizzo le elementari funzioni C^∞ a supporto compatto, dopo averne stimato (rozzamente) le derivate nel Lemma G.15 e stimando le derivate della composizione con la (8.57). La composizione delle trasformazioni cosí ottenute convergerà in metrica C^∞ a una trasformazione canonica $C^\infty-$vicina all'identità.

- Presto attenzione all'analiticità nel parametro μ: a differenza di [CG94] provo tale analiticità, dovuta a una convergenza uniforme, nel caso ad energia fissata.

Osserviamo, infine, che, omettendo le variabili iperboliche p e q, il Teorema 8.1 costituisce anche una dimostrazione del Teorema KAM classico nel caso reale analitico.

Grossolanamente, il Teorema 8.1 si può cosí enunciare:
Se l'hamiltoniana

$$H(I,\varphi,p,q) = h(I,pq;\mu) + \mu f(I,\varphi,p,q;\mu)$$

è reale analitica e sufficientemente generica e $|\mu|$ è sufficientemente piccolo, allora esiste una trasformazione canonica $\Phi \in C^\infty$ e $C^\infty-$vicina all'identità, analitica nel parametro μ, tale che, su un opportuno insieme di Cantor, $H \circ \Phi$ dipenda solo da I e dal prodotto delle variabili p e q. Su tale insieme, le frequenze della nuova hamiltoniana sono vicine alle frequenze dell'hamiltoniana H. Si ottengono infine dei tori invarianti $(\ell-1)-$dimensionali con baffi $\ell-$dimensionali. Tali tori riempiono la maggior parte dello spazio a loro disposizione.

Più precisamente:

Teorema 8.1 *Sia $\widehat{I} \in \mathbf{R}^{\ell-1}$ fissato. Data l'hamiltoniana*

$$H(I,\varphi,p,q) = h_0(I,pq;\mu) + f_0(I,\varphi,p,q;\mu)$$

con $(I,\varphi,p,q) \in \mathbf{R}^{\ell-1} \times \mathbf{T}^{\ell-1} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ e $\mu \in \mathbf{R}$, denotiamo[2]

$$\mathcal{D}_\tau^\gamma \equiv \{I \in \mathbf{C}^{\ell-1} \text{ tc } |I-\widehat{I}| \leq \rho/2 \text{ e } \partial_I h_0(I,0;0) \text{ è } (\gamma,\tau)\text{-diofantino } \}$$

[2]Notiamo, per inciso, che il Teorema è vero anche se l'hamiltoniana dipende da più parametri $\mu^{(1)},\dots,\mu^{(d)}$. La dimostrazione resta immutata, considerando $\mu \equiv (\mu^{(1)},\dots,\mu^{(d)}) \in \mathbf{R}^d$.

e assumiamo che H sia reale analitica in

$$\begin{array}{l} W_{\rho,\xi,R,\bar\mu} \equiv \{(I,\varphi,p,q,\mu)\in \mathbf{C}^{\ell-1}\times\mathbf{C}^{\ell-1}\times\mathbf{C}\times\mathbf{C}\times\mathbf{C} \text{ tc} \\ |I-\widehat{I}|\le\rho,\ |\Im\varphi|\le\xi,\ |p|\le R,\ |q|\le R,\ |\mu|\le\bar\mu\} \end{array}$$

e tale che, denotando $\zeta\equiv pq$,

$$\begin{array}{rcl} \lambda_0 & \equiv & \inf_{|I-\widehat{I}|\le\rho,\ |\zeta|\le R^2} |\partial_\zeta h_0(I,\zeta)|>0 \\ E & \equiv & h_0(0,0;0) \end{array}$$

Supponiamo che

$$\mathcal{U}(I,\zeta;\mu)\equiv\begin{pmatrix} \partial_I^2 h_0(I,\zeta;\mu) & c\partial_I h_0(I,\zeta;\mu) \\ c\partial_I h_0(I,\zeta;\mu) & 0\end{pmatrix}\in \mathrm{Mat}(\ell\times\ell)$$

sia[3] *invertibile su $W_{\rho,\xi,R,\bar\mu}$. Assumiamo che la seguente condizione sia verificata, con Ξ e Λ costanti opportune, dipendenti da h_0:*

$$\Xi\left(\log\frac{e^2\,10^{\ell-1}\,\min\{\gamma^2,\,\lambda_0^2\}}{c^2\,E\,\theta_0}\right)^{\Lambda}\frac{c^2\,E\,\theta_0}{\min\{\gamma^2,\,\lambda_0^2\}}\le 1 \qquad (8.1)$$

dove $\theta_0\equiv\sup_{W_{\rho,\xi,R,\mu}}|f_0|$.

Allora esistono μ_0 e R_∞, $0<\mu_0\le\bar\mu$ e $0<R_\infty\le R$, ed esistono: una trasformazione canonica $\Phi\in \mathrm{C}^\infty$, $\mathrm{C}^\infty-$vicina all'identità per μ piccoli e reale analitica nel parametro $|\mu|\le\mu_0$, due funzioni $h_\infty(I,\zeta;\mu)$ e $\mathcal{I}_\infty^{\bar I}(\zeta;\mu)$ con $\mathcal{I}_\infty^{\bar I}(0;0)=\bar I$, $\mathcal{I}_\infty^{\bar I}$ reale analitica per $|\zeta|\le R_\infty^2$, $|\mu|\le\mu_0$ e definita $\forall\bar I\in\mathcal{D}_\tau^\gamma$, e h_∞ reale analitica su

$$\Omega\equiv\{(\mathcal{I}_\infty^{\bar I}(\zeta;\mu),\zeta;\mu)\ \text{tc}\ \bar I\in\mathcal{D}_\tau^\gamma,\ \ |\zeta|\le R_\infty^2\ \text{ e }\ |\mu|\le\mu_0\}$$

in modo tale che

$$\begin{array}{l} \partial^\nu\left(H\circ\Phi(I,\varphi,p,q;\mu)\right)=\partial^\nu h_\infty(I,pq)\,,\ \ \forall(I,pq;\mu)\in\Omega,\ \varphi\in\mathbf{T}^{\ell-1},\ \nu\in\mathbf{N}^{2\ell} \\ h_\infty(I,\zeta;\mu)=E\,,\ \ \forall(I,\zeta;\mu)\in\Omega \end{array} \qquad (8.2)$$

Esiste[4] *inoltre una funzione $\alpha_\infty(\zeta;\mu)$, analitica per $|\zeta|\le R_\infty^2$ e $|\mu|\le\mu_0$ tale che*

$$\sup_{|\zeta|\le R_\infty^2,\,|\mu|\le\mu_0}|\alpha_\infty|\le c\rho$$

---

[3] c è solo una costante dimensionale, con le dimensioni dell'inverso delle dimensioni di I.

[4] Da (8.2) segue che, fissati $|\mu|\le\mu_0$ e $\bar I\in\mathcal{D}_\tau^\gamma$, il toro

$$\mathcal{T}\equiv\{(\mathcal{I}_\infty^{\bar I}(0;\mu),\varphi,0,0),\ \varphi\in\mathbf{T}^{\ell-1}\}$$

$$\partial_I h_\infty(\mathcal{I}_\infty^{\bar{I}}(\zeta;\mu),\zeta;\mu) = \partial_I h_0(\bar{I},0;0)\cdot(1+\alpha_\infty(\zeta;\mu)) \tag{8.3}$$

Infine: fissiamo $|\mu|\le\mu_0$ *e sia* $\mathcal{D}_\tau \equiv \bigcup \mathcal{D}_\tau^\gamma$*, dove l'unione è fatta su tutti i* γ *che verificano la condizione* (8.1) *e definiamo*

$$\begin{aligned}
\Omega_\mu^* &\equiv \{\mathcal{I}_\infty^{\bar{I}}(0;\mu),\ \bar{I}\in\mathcal{D}_\tau\}\\
\Omega_\mu^\sharp &\equiv \{(\mathcal{I}_\infty^{\bar{I}}(pq;\mu),p,q),\ \bar{I}\in\mathcal{D}_\tau,\ |p|\le R_\infty,\ |q|\le R_\infty\}\\
\Psi(I,\varphi) &\equiv \pi_{(I,\varphi)}\circ\Phi(I,\varphi,0,0)
\end{aligned} \tag{8.4}$$

dove l'unione è fatta sulle $\gamma\le\lambda_0$ *che verificano la condizione* (8.1) *e* π *indica la proiezione, si ha*[5]*:*

$$\begin{aligned}
\mathrm{mis}_E\Omega_\mu^* &\ge \mathrm{mis}B_\rho^{\ell-2}\cdot\left(1-O(\sqrt{\theta_0})\right)\\
\mathrm{mis}^E\Omega_\mu^\sharp &\ge R_\infty^2\cdot\mathrm{mis}B_\rho^{\ell-2}\cdot\left(1-O(\sqrt{\theta_0})\right)\\
\mathrm{mis}_E\Psi(\Omega_\mu^*\times\mathbf{T}^{\ell-1}) &\ge \mathrm{mis}\left(B_\rho^{\ell-2}\times\mathbf{T}^{\ell-1}\right)\cdot\left(1-O(\sqrt{\theta_0})\right)\\
\mathrm{mis}^E\Phi(\Omega_\mu^\sharp\times\mathbf{T}^{\ell-1}) &\ge R_\infty^2\cdot\mathrm{mis}\left(B_\rho^{\ell-2}\times\mathbf{T}^{\ell-1}\right)\cdot\left(1-O(\sqrt{\theta_0})\right)
\end{aligned} \tag{8.5}$$

è invariante per $\Phi_{h_\infty}^t$ e si trova sul livello di energia E. $\mathcal{T}$ è contenuto nella seguente superficie $\mathcal{S}$, invariante per $\Phi_{h_\infty}^t$ per tempi brevi:

$$\mathcal{S}\equiv\{(\mathcal{I}_\infty^{\bar{I}}(pq;\mu),\varphi,p,q),\ \varphi\in\mathbf{T}^{\ell-1},\ |p|\le R_\infty^2,\ |q|\le R_\infty^2\}$$

Su $\mathcal{S}$ il moto è

$$\begin{aligned}
&\Phi_{h_\infty}^t(\mathcal{I}_\infty^{\bar{I}}(pq;\mu),\varphi,p,q) = \Big(\mathcal{I}_\infty^{\bar{I}}(pq;\mu),\varphi+\partial_I h_\infty\left(\mathcal{I}_\infty^{\bar{I}}(pq;\mu),pq;\mu\right)\cdot t,\\
&pe^{-\partial_\zeta h_\infty\left(\mathcal{I}_\infty^{\bar{I}}(pq;\mu),pq;\mu\right)t}, qe^{\partial_\zeta h_\infty\left(\mathcal{I}_\infty^{\bar{I}}(pq;\mu),pq;\mu\right)t}\Big)
\end{aligned}$$

[5]Ho denotato con $B_\rho^{\ell-2}$ la palla $(\ell-2)-$dimensionale di raggio ρ, con mis_E la misura ristretta alla superficie di livello $h_\infty(I,0;\mu)=E$ e con mis^E la misura ristretta alla superficie di livello $h_\infty(I,pq;\mu)=E$.

L'area infinitesima di un'ipersuperficie definita da una carta $\phi(x):\mathbf{R}^{n-1}\longrightarrow\mathbf{R}^n$ è

$$\left(\sum_{j=1}^n\left(\det\frac{\partial(\phi_1,\ldots,\phi_{j-1},\phi_{j+1},\ldots,\phi_n)}{\partial x}\right)^2\right)^{1/2} dx$$

Un'altra scrittura di Ω_μ^* e $\Omega_\mu^\sharp$ sarà data da (8.66) e (8.69).

DIM. Definiamo le seguenti costanti in modo che

$$\begin{array}{ccc} \sup|\partial_I h_0| \le L_0 & \sup|\partial_\zeta h_0| \le V_0 & \sup|\partial_\mu h_0| \le Z_0 \\ \sup|\partial_I^2 h_0| \le A_0 & \sup|\mathcal{U}^{-1}| \le B_0 & \sup|\partial_{I\zeta}^2 h_0| \le D_0 \\ \sup|\partial_\zeta^2 h_0| \le S_0 & \sup|\partial_{I\mu}^2 h_0| \le M_0 & \sup|\partial_{\zeta\mu}^2 h_0| \le M_0 \\ \sup|\partial_\mu \partial_I^2 h_0| \le M_0' & \sup|\partial_I^3 h_0| \le D_0' & \sup|\partial_\zeta \partial_I^2 h_0| \le A_0' \end{array}$$

dove il sup è fatto su $W_{\rho,\xi,R,\mu}$. Siano[6]

$$\begin{aligned} &\rho_0 \le \min\left\{\frac{\rho}{4},\, \frac{1}{2c},\, \frac{\lambda_0}{12D_0},\, \frac{1}{6\ell B_0(cA_0+D_0')},\right. \\ &\left.\frac{\lambda_0}{4cL_0\,N_0},\, \frac{\gamma_0^*}{c^2\,E},\, \frac{E}{\gamma_0^*},\right\} \\ &R_0 \le \min\left\{\frac{R}{2},\, \sqrt{\frac{1}{6\ell B_0(A_0'+cD_0)}},\, \sqrt{\frac{\lambda_0}{6S_0}},\, \sqrt{\frac{\rho_0}{4B_0(D_0+cV_0)}}\right\} \\ &\mu_0 \le \min\left\{\bar\mu,\, \frac{1}{6B_0\ell(cM_0+M_0')},\, \frac{\lambda_0}{6M_0},\, \frac{\rho_0}{4B_0(M_0+cZ_0)}\right\} \end{aligned} \tag{8.6}$$

con $N_0 \ge 1$ che sceglierò opportunamente e $\gamma_0^* \equiv \min\{\gamma,\, \lambda_0/4\}$. Comunque scelto $\bar I \in \mathcal{D}_\tau^\gamma$, per il Lemma G.13, esistono due funzioni $\mathcal{I}_0^{\bar I}(\zeta;\mu)$ e $\alpha_0(\zeta;\mu)$ reali analitiche in $|\zeta| \le R_0^2$ e $|\mu| \le \mu_0$ tali che

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_0^{\bar I}(0;0) &= \bar I \\ \partial_I h_0(\mathcal{I}_0^{\bar I}(\zeta;\mu),\zeta;\mu) &= \omega_0\,(1+\alpha_0(\zeta;\mu)) \\ h_0(\mathcal{I}_0^{\bar I}(\zeta;\mu),\zeta;\mu) &= E \end{aligned} \tag{8.7}$$

con $|\mathcal{I}_0^{\bar I}(\zeta;\mu) - \bar I| \le \rho_0$ e $|\alpha_0(\zeta;\mu)| \le c\rho_0$, avendo posto $\omega_0 = \omega_0(\bar I) \equiv \partial_I h_0(\bar I, 0; 0)$.

Data $F(I,\varphi,p,q;\mu)$, scriviamo

$$F(I,\varphi,p,q;\mu) \equiv \sum_{k,j\in\mathbf{N},\, n\in\mathbf{Z}^{\ell-1}} F_{kjn}(I;\mu)\; p^k q^j\, e^{in\cdot\varphi}$$

Se F è analitica in W_{a,b,c,μ_0} si ha

$$\sup_{|I-\widehat I|\le a,\, |\mu|\le\mu_0} |F_{kjn}(I)| \le \frac{\sup_{W_{a,b,c,\mu_0}} |F|\; e^{-|n|b}}{c^{k+j}} \tag{8.8}$$

[6] R_0 dipende da ρ_0 **solo** nel passo zero dell'algoritmo: poi $\rho_i \xrightarrow{i\to\infty} 0$, mentre invece $R_i \ge R_\infty > 0$.

Operiamo una Trasformazione di Lie $(I, \varphi, p, q) \equiv \Phi^1_{\chi_0^*}(I', \varphi', p', q')$. Definiamo[7]

$$\chi_0(I', \varphi', p', q') \equiv \tag{8.9}$$
$$\equiv \sum_{\substack{k,j\in\mathbf{N},\ n\in\mathbf{Z}^{\ell-1} \\ |k-j|+|n|>0 \\ |n|\le N_0}} \frac{-f_{kjn}(I';\mu)}{(k-j)\partial_\zeta h_0(I', p'q';\mu) - i\partial_I h_0(I', p'q';\mu)\cdot n} {p'}^k {q'}^j \; e^{in\cdot\varphi'}$$

dove $I', p'q', \mu$ appartengono a[8]

$$\begin{aligned}
&\Omega^0_{\tilde\rho_0,R_0,\xi_0,\mu_0} \equiv \{(I,\varphi,\zeta,\mu)\in \mathbf{C}^{\ell-1}\times\mathbf{C}^{\ell-1}\times\mathbf{C}\times\mathbf{C} \text{ tc} \\
&|\zeta|\le R_0^2,\ |\Im\varphi|\le\xi_0,\ |\mu|\le\mu_0 \\
&\text{e } \exists\zeta^*,\mu^*,\bar I,\ |\zeta^*|\le R_0^2,\ |\mu^*|\le\mu_0,\ \bar I\in\mathcal{D}^\gamma_\tau \text{ tc } |I-\mathcal{I}_0^{\bar I}(\zeta^*;\mu^*)|\le\tilde\rho_0\}
\end{aligned}$$

con $\tilde\rho_0$ che definirò opportunamente in seguito e $\xi_0 \equiv \xi/2$. Estendiamo ora χ_0 su tutto lo spazio in modo C^∞: dal Lemma G.15 segue che esistono quattro funzioni liscie $\psi_0^{[I]}(I)$, $\psi_0^{[\varphi]}(\varphi)$, $\psi_0^{[p]}(p)$ e $\psi_0^{[q]}(q)$ in modo che

$$\begin{aligned}
&\operatorname{supp}\psi_0^{[I]} \subseteq \{I \text{ tc } \exists\zeta^*,\mu^*,\bar I,\ |\zeta^*|\le R_0^2 e^{-2\delta_0} \\
&|\mu^*|\le\mu_0,\ \bar I\in\mathcal{D}^\gamma_\tau \text{ tc } |I-\mathcal{I}_0^{\bar I}(\zeta^*;\mu^*)|\le\tilde\rho_0\}, \\
&\psi_0^{[I]}(I)=1\ \forall I \text{ tc } \exists\zeta^*,\mu^*,\ \bar I,\ |\zeta^*|\le R_0^2 e^{-2\delta_0},\ |\mu^*|\le\mu_0,\ \bar I\in\mathcal{D}^\gamma_\tau \text{ tc} \\
&|I-\mathcal{I}_0^{\bar I}(\zeta^*;\mu^*)|\le\tilde\rho_0/2 \\
&\operatorname{supp}\psi_0^{[\varphi]}\subseteq\{|\Im\varphi|\le\xi_0\},\ \psi_0^{[\varphi]}(\varphi)=1\ \forall|\Im\varphi|\le\xi_0-\delta_0 \\
&\operatorname{supp}\psi_0^{[p]}\subseteq\{|p|\le R_0\},\ \psi_0^{[p]}(p)=1\ \forall|p|\le R_0e^{-\delta_0} \\
&\operatorname{supp}\psi_0^{[q]}\subseteq\{|q|\le R_0\},\ \psi_0^{[q]}(q)=1\ \forall|q|\le R_0e^{-\delta_0}
\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
&\sup_{\mathbf{R}^{\ell-1}}|\partial^\alpha\psi_0^{[I]}| \le \frac{K}{\tilde\rho_0{}^{|\alpha|}} \\
&\sup_{\mathbf{R}^{\ell-1}}|\partial^\alpha\psi_0^{[\varphi]}| \le \frac{K}{\delta_0^{|\alpha|}} \\
&\sup_{\mathbf{R}}|\partial^\alpha\psi_0^{[p]}| \le \frac{K}{[eR_0(1-e^{-\delta_0})]^{|\alpha|}} \le \frac{K}{R_0^{|\alpha|}\,\delta_0^{|\alpha|}}
\end{aligned}$$

[7]Ho denotato f_{kjn} i coefficienti di Taylor–Fourier di f_0. Ad essere precisi, avrei dovuto scrivere $(f_0)_{kjn}$, ma non l'ho fatto per non appesantire ulteriormente la notazione.

[8]L'indice 0 in alto nella definizione di $\Omega^0_{\tilde\rho_0,R_0,\xi_0,\mu_0}$ si riferisce all'indice di $\mathcal{I}_0^{\bar I}$.

$$\sup_{\mathbf{R}} |\partial^\alpha \psi_0^{[q]}| \leq \frac{K}{[eR_0(1-e^{-\delta_0})]^{|\alpha|}} \leq \frac{K}{R_0^{|\alpha|}\, \delta_0^{|\alpha|}} \tag{8.10}$$

$\forall |\alpha| \leq 2$, essendo K un'opportuna costante e avendo fissato $0 < \delta_0 < \min\{1,\, \xi_0\}$. Poniamo perciò:

$$\chi_0^*(I', \varphi', p', q') \equiv \begin{cases} \chi_0(I', \varphi', p', q') \cdot \psi_0^{[I]}(I) \cdot \psi_0^{[\varphi]}(\varphi) \cdot \psi_0^{[p]}(p) \cdot \psi_0^{[q]}(q) \\ \qquad \text{se } (I', \varphi', p'q', \mu) \in \Omega^0_{\tilde\rho_0, R_0, \xi_0, \mu_0}, \\ \qquad 0 \quad \text{altrimenti} \end{cases}$$

Cosí facendo χ_0^* è continua su tutto lo spazio delle fasi complesso, per $|\mu| \leq \mu_0$ ed è C^∞ sullo spazio delle fasi reale; inoltre $\chi_0^* = \chi_0$ su $\Omega^0_{\tilde\rho_0/2, R_0 e^{-\delta_0}, \xi_0 e^{-\delta_0}, \mu_0}$.

Per definizione, su $\Omega^0_{\tilde\rho_0/2, R_0 e^{-\delta_0}, \xi_0 e^{-\delta_0}, \mu_0}$, è:

$$\begin{aligned} & \{h_0, \chi_0^*\} = \{h_0, \chi_0\} = \\ = \; & \partial_\zeta h_0(I', p'q'; \mu) \cdot (p'\partial_{p'} \chi_0(I', \varphi', p', q') - q'\partial_{q'} \chi_0(I', \varphi', p', q')) - \\ & -\partial_I h_0(I', p'q'; \mu) \cdot \partial_{\varphi'} \chi_0(I', \varphi', p', q') = \\ = \; & - \sum_{\substack{k,j \in \mathbf{N},\; n \in \mathbf{Z}^{\ell-1} \\ |k-j|+|n|>0 \\ |n| \leq N_0}} f_{kjn}(I'; \mu) p'^k q'^j \, e^{in\cdot\varphi'} = \\ = \; & -f_0(I', \varphi', p', q') + \sum_{\substack{k,j \in \mathbf{N},\; n \in \mathbf{Z}^{\ell-1} \\ |n| \geq N_0}} f_{kjn}(I'; \mu) p'^k q'^j \, e^{in\cdot\varphi'} + \\ & + \sum_{k \in \mathbf{N}} f_{kk0}(I'; \mu)(p'q')^k \end{aligned} \tag{8.11}$$

Inoltre:

$$\sum_{j \geq 0} e^{-j\delta_0} = \frac{e^{\delta_0}}{e^{\delta_0} - 1} \leq \frac{e^{\delta_0}}{\delta_0} \leq \frac{e}{\delta_0} \tag{8.12}$$

Da ciò e dal penultimo passaggio di (8.11), ricordando anche il Lemma G.2:

$$\begin{aligned} & \sup_{\Omega^0_{\tilde\rho_0/2, R_0 e^{-\delta_0}, \xi_0 e^{-\delta_0}, \mu_0}} |\{h_0, \chi_0^*\}| = \sup_{\Omega^0_{\tilde\rho_0/2, R_0 e^{-\delta_0}, \xi_0 e^{-\delta_0}, \mu_0}} |\{h_0, \chi_0\}| \leq \\ \leq \; & \sum_{\substack{k,j \in \mathbf{N} \\ n \in \mathbf{Z}^{\ell-1}}} \frac{\theta_0}{R_0^{k+j}}\, e^{-|n|\xi_0} \, (R_0 e^{-\delta_0})^{k+j} \, e^{|n|(\xi_0 - \delta_0)} \leq \\ \leq \; & e^2 \, c(0, \ell-1) \, \theta_0 \, \delta_0^{-\ell-2} \leq K^\sharp \theta_0 \end{aligned} \tag{8.13}$$

Si ha inoltre, grazie al Lemma G.2:

$$
\begin{aligned}
&\sup_{W_{\rho_0,\xi_0-\delta_0,R_0e^{-\delta_0},\mu_0}} \left| \sum_{\substack{k,j\in\mathbf{N},\, n\in\mathbf{Z}^{\ell-1}\\ |n|\geq N_0}} f_{kjn}(I';\mu)p'^k q'^j\, e^{in\cdot\varphi'} \right| \leq \\
\leq\ & \sum_{\substack{h,k\in\mathbf{N},\, n\in\mathbf{Z}^{\ell-1}\\ |n|\geq N_0}} \frac{\theta_0\, e^{-|n|\xi_0}}{(R)^{k+j}} \cdot (R_0 e^{-\delta_0})^{k+j}\, e^{|n|\,(\xi_0-\delta_0)} \overset{(8.12)}{\leq} \\
\leq\ & e^2\,\delta_0^{-2}\,\theta_0 \sum_{\substack{n\in\mathbf{Z}^{\ell-1}\\ |n|\geq N_0}} e^{-|n|\delta_0} \leq \\
\leq\ & e^2\,\delta_0^{-2}\,\theta_0\, 10^{\ell-1}\,\delta_0^{-\ell}\, e^{-N_0\delta_0/2} \leq \theta_0^2\,\delta_0^{-(\ell+2)}\, E\, c^2\,(\gamma_0^*)^{-2}
\end{aligned} \tag{8.14}
$$

avendo scelto

$$
N_0 \geq \frac{2}{\delta_0}\,\log\frac{e^2\,10^{\ell-1}\,(\gamma_0^*)^2}{c^2\,E\,\theta_0} \tag{8.15}
$$

Stima sui piccoli denominatori. Sia[9] $A_0^* \equiv A_0$

$$
\tilde{\rho}_0 \equiv \frac{\gamma}{2A_0^* N_0^\tau} \overset{(8.17)}{\leq} \min\left\{\frac{\rho_0}{2},\, R_0^2,\, \frac{\gamma}{2A_0 N_0^\tau}\right\} \tag{8.16}
$$

avendo assunto la seguente condizione di piccolezza su γ:

$$
\gamma \leq 2A_0^* N_0^\tau\, \min\{\rho_0/2,\, R_0^2\} \tag{8.17}
$$

Affermo che[10], su $\Omega^0_{\tilde{\rho}_0,R_0,\xi_0,\mu_0}$, si ha:

$$
|(k-j)\partial_\zeta h_0(I',p'q';\mu) - i\partial_I h_0(I',p'q';\mu)\cdot n| \geq \frac{\gamma_0^*}{|n|^\tau} \tag{8.18}
$$

Infatti: se $n=0$ deve essere $k\neq j$ perciò

$$
|(k-j)\partial_\zeta h_0(I',p'q';\mu)| \geq |\partial_\zeta h_0(I',p'q';\mu)| \geq \lambda_0 \geq \frac{\gamma_0^*}{|n|^\tau} \tag{8.19}
$$

Osserviamo che

$$
|\partial_I h_0(\mathcal{I}_0^{\bar{I}}(\zeta;\mu),\zeta;\mu)\cdot n| = |(1+\alpha_0(\zeta;\mu))\omega_0\cdot n| \geq
$$

[9]La definizione di A_0^* serve solo per uniformare la notazione col passo $j-$esimo, in cui definirò $A_j^* \equiv \max\{A_0,\, A_j\}$.

[10]La (8.18) mostra anche che la serie che definisce χ_0 converge su $\Omega^0_{\tilde{\rho}_0,R_0,\xi_0,\mu_0}$.

$$\geq \quad (1 - c\rho_0)\,|\omega_0 \cdot n| \geq \frac{1}{2}\frac{\gamma}{|n|^\tau} \tag{8.20}$$

Per cui, se $k = j$ deve essere $n \neq 0$, cosí che:

$$\begin{aligned} & |\partial_I h_0(I, \zeta; \mu) \cdot n| \geq \\ \geq \quad & |\partial_I h_0(\mathcal{I}_0^{\bar{I}}(\zeta; \mu), \zeta; \mu) \cdot n| - \\ & -|\partial_I h_0(\mathcal{I}_0^{\bar{I}}(\zeta; \mu), \zeta; \mu) - \partial_I h_0(I, \zeta; \mu)|\, N_0 \overset{(8.20)}{\geq} \\ \geq \quad & \frac{\gamma}{2|n|^\tau} - A_0\tilde{\rho}_0 \geq \frac{\gamma}{4|n|^\tau} \end{aligned} \tag{8.21}$$

Se infine $k \neq j$ e $n \neq 0$ procediamo[11] cosí:

$$|\partial_\zeta h_0(I, \zeta; \mu) - \partial_\zeta h_0(\bar{I}, 0; 0)| \leq 2D_0\rho_0 + S_0 R_0^2 + M_0\mu_0 \leq \frac{\lambda_0}{2} \tag{8.22}$$

da cui, essendo $\partial_\zeta h_0(\bar{I}, 0; 0)$ reale:

$$\begin{aligned} & |\partial_\zeta h_0(\bar{I}, 0; 0)| - |\Re[\partial_\zeta h_0(I, \zeta; \mu)]| \leq \\ \leq \quad & |\Re[\partial_\zeta h_0(I, \zeta; \mu)] - \partial_\zeta h_0(\bar{I}, 0; 0)| = \\ = \quad & |\Re[\partial_\zeta h_0(I, \zeta; \mu) - \partial_\zeta h_0(\bar{I}, 0; 0)]| \leq \\ \leq \quad & |\partial_\zeta h_0(I, \zeta; \mu) - \partial_\zeta h_0(\bar{I}, 0; 0)| \leq \frac{\lambda_0}{2} \end{aligned} \tag{8.23}$$

Da questa relazione si ottiene:

$$|\Re[\partial_\zeta h_0(I, \zeta; \mu)]| \geq |\partial_\zeta h_0(\bar{I}, 0; 0)| - \frac{\lambda_0}{2} \geq \lambda_0 - \frac{\lambda_0}{2} = \frac{\lambda_0}{2} \tag{8.24}$$

Essendo inoltre ω_0 reale:

$$\begin{aligned} & |i\partial_I h_0(\mathcal{I}_0^{\bar{I}}(\zeta; \mu), \zeta; \mu) \cdot n + \partial_\zeta h_0(I, \zeta; \mu)\,(k - j)| \geq \\ \geq \quad & |\Re[i\partial_I h_0(\mathcal{I}_0^{\bar{I}}(\zeta; \mu), \zeta; \mu) \cdot n + \partial_\zeta h_0(I, \zeta; \mu)\,(k - j)]| = \\ = \quad & |\Re[i(1 + \alpha_0(\zeta; \mu))\omega_0 \cdot n + \partial_\zeta h_0(I, \zeta; \mu)\,(k - j)]| = \\ = \quad & |\Re[i\alpha_0(\zeta; \mu)\omega_0 \cdot n + \partial_\zeta h_0(I, \zeta; \mu)\,(k - j)]| \geq \\ \geq \quad & |k - j|\,|\Re\partial_\zeta h_0(I, \zeta; \mu)| - |\Re[i\alpha_0(\zeta; \mu)\omega_0 \cdot n]| \geq \end{aligned}$$

[11] Nella (8.22) utilizzo anche il fatto che, se $|I - \mathcal{I}_0^{\bar{I}}(\zeta^*, \mu^*)| \leq \tilde{\rho}_0$, si ha

$$|I - \bar{I}| \leq |I - \mathcal{I}_0^{\bar{I}}(\zeta^*, \mu^*)| + |\mathcal{I}_0^{\bar{I}}(\zeta^*, \mu^*) - \bar{I}| \leq \tilde{\rho}_0 + \rho_0 \leq 2\rho_0$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \quad |\Re\partial_\zeta h_0(I,\zeta;\mu)| - |i\alpha_0(\zeta;\mu)\omega_0\cdot n| \overset{(8.24)}{\geq} \\
&\geq \quad \frac{\lambda_0}{2} - c\rho_0\,|\omega_0|\,N_0 \geq \frac{\lambda_0}{4} \geq \frac{\gamma_0^*}{|n|^\tau}
\end{aligned}
\tag{8.25}
$$

Da (8.19), (8.21) e (8.25) segue (8.18). Si osservi che in questa stima sui piccoli denominatori ho usato il fatto che

$$
\rho_0 \leq \min\left\{\frac{1}{2c},\,\frac{\lambda_0}{12D_0},\,\frac{\lambda_0}{4cL_0N_0}\right\}
\tag{8.26}
$$

Stima sulla trasformazione di Lie. Usando la (8.18), la (8.8), la (8.12) e il Lemma G.2:

$$
\begin{aligned}
&\sup_{\Omega^0_{\tilde\rho_0,R_0e^{-\delta_0},\xi_0-\delta_0,\mu_0}} |\chi_0| \leq \\
&\leq \quad \sum_{k,j\in\mathbf{N},\,n\in\mathbf{Z}^{\ell-1}} \frac{|f_{kjn}|\,|n|^\tau}{\gamma_0^*}\,R_0^{k+j}\,e^{-(k+j)\delta_0}\;e^{|n|\,(\xi_0-\delta_0)} \leq \\
&\leq \quad \sum_{k,j\in\mathbf{N},\,n\in\mathbf{Z}^{\ell-1}} \frac{\theta_0 e^{-|n|\xi_0}\,|n|^\tau}{\gamma_0^*}\,e^{-(k+j)\delta_0}\;e^{|n|\,(\xi_0-\delta_0)} \leq \\
&\leq \quad \frac{\theta_0\,e^2}{\gamma_0^*\,\delta_0^2}\sum_{n\in\mathbf{Z}^{\ell-1}} |n|^\tau\;e^{-|n|\delta_0} \leq \\
&\leq \quad \frac{\theta_0\,e^2}{\gamma_0^*}\cdot c(\tau,\ell-1)\,\delta_0^{-(\ell+\tau+2)}
\end{aligned}
\tag{8.27}
$$

Per cui, con la Stima di Cauchy, con un'opportuna $\hat\kappa$ dipendente solo da ℓ e τ:

$$
\begin{aligned}
&\sup_{\Omega^0_{\tilde\rho_0/2,R_0e^{-2\delta_0},\xi_0-2\delta_0,\mu_0}}\;\sup_{1\leq i\leq \ell-1} |\partial_{I_i'}\chi_0| \leq \frac{2e^2\,\theta_0}{\gamma_0^*\,\tilde\rho_0}\cdot c(\tau,\ell-1)\,\delta_0^{-\hat\kappa} \\
&\sup_{\Omega^0_{\tilde\rho_0/2,R_0e^{-2\delta_0},\xi_0-2\delta_0,\mu_0}}\;\sup_{1\leq i\leq \ell-1} |\partial_{\varphi_i'}\chi_0| \leq \frac{e^2\,\theta_0}{\gamma_0^*}\cdot c(\tau,\ell-1)\,\delta_0^{-\hat\kappa} \\
&\sup_{\Omega^0_{\tilde\rho_0/2,R_0e^{-2\delta_0},\xi_0-2\delta_0,\mu_0}} |\partial_{p'}\chi_0| \leq \frac{e^4\,\theta_0}{\gamma_0^*\,R_0}\cdot c(\tau,\ell-1)\,\delta_0^{-\hat\kappa} \\
&\sup_{\Omega^0_{\tilde\rho_0/2,R_0e^{-2\delta_0},\xi_0-2\delta_0,\mu_0}} |\partial_{q'}\chi_0| \leq \frac{e^4\,\theta_0}{\gamma_0^*\,R_0}\cdot c(\tau,\ell-1)\,\delta_0^{-\hat\kappa}
\end{aligned}
\tag{8.28}
$$

Per definizione di χ_0^* abbiamo che

$$\sup_{\mathbf{R}^\ell\times\mathbf{T}^\ell\times\{|\mu|\le\mu_0\}}|\chi_0^*|\le\sup_{\Omega^0_{\tilde\rho_0,R_0e^{-\delta_0},\xi_0-\delta_0,\mu_0}}|\chi_0|\le\frac{\theta_0\,e^2}{\gamma_0^*}\cdot c(\tau,\ell-1)\,\delta_0^{-\hat\kappa}\tag{8.29}$$

e inoltre, grazie a (8.10):

$$\begin{aligned}&\sup_{\mathbf{R}^\ell\times\mathbf{T}^\ell\times\{|\mu|\le\mu_0\}}|\partial_{I_i'}\chi_0^*|\le\\ \le\ &\sup_{\Omega^0_{\tilde\rho_0/2,R_0e^{-2\delta_0},\xi_0-2\delta_0,\mu_0}}\ \sup_{1\le i\le\ell-1}|\partial_{I_i'}\chi_0|+\sup_{\mathbf{R}^\ell\times\mathbf{T}^\ell\times\{|\mu|\le\mu_0\}}|\chi_0\cdot\partial_{I'}\psi^{[I]}|\le\\ \le\ &\frac{2e^2\,\theta_0}{\gamma_0^*\,\tilde\rho_0}\cdot c(\tau,\ell-1)\,\delta_0^{-\hat\kappa}+\frac{\theta_0\,e^2}{\gamma_0^*}\cdot c(\tau,\ell-1)\,\delta_0^{-\hat\kappa}\cdot\frac{K}{\tilde\rho_0}\end{aligned}$$

e le altre derivate sono analoghe. In questo modo, definendo due opportune costanti $\tilde\kappa$ e $\kappa^\sharp$, dipendenti solo da ℓ e τ, si ha:

$$\begin{aligned}\sup_{\mathbf{R}^\ell\times\mathbf{T}^\ell\times\{|\mu|\le\mu_0\}}\ \sup_{1\le i\le\ell-1}|\partial_{I_i'}\chi_0^*|&\le\frac{\tilde\kappa\,\theta_0}{\gamma_0^*\,\tilde\rho_0}\cdot\ \delta_0^{-\kappa^\sharp}\\ \sup_{\mathbf{R}^\ell\times\mathbf{T}^\ell\times\{|\mu|\le\mu_0\}}\ \sup_{1\le i\le\ell-1}|\partial_{\varphi_i'}\chi_0^*|&\le\frac{\tilde\kappa\,\theta_0}{\gamma_0^*}\cdot\ \delta_0^{-\kappa^\sharp}\\ \sup_{\mathbf{R}^\ell\times\mathbf{T}^\ell\times\{|\mu|\le\mu_0\}}|\partial_{p'}\chi_0^*|&\le\frac{\tilde\kappa\,\theta_0}{\gamma_0^*\,R_0}\cdot\ \delta_0^{-\kappa^\sharp}\\ \sup_{\mathbf{R}^\ell\times\mathbf{T}^\ell\times\{|\mu|\le\mu_0\}}|\partial_{q'}\chi_0^*|&\le\frac{\tilde\kappa\,\theta_0}{\gamma_0^*\,R_0}\cdot\ \delta_0^{-\kappa^\sharp}\end{aligned}\tag{8.30}$$

Quindi, per la Proposizione[12] 2.19, $\forall|t|\le 3$

$$\begin{aligned}\Phi^t_{\chi_0^*}:\Omega^0_{\tilde\rho_0/4,R_0e^{-4\delta_0},\xi_0-4\delta_0,\mu_0}\ &\longrightarrow\ \Omega^0_{\tilde\rho_0/3,R_0e^{-3\delta_0},\xi_0-3\delta_0,\mu_0}\subset\\ &\subset\ \Omega^0_{\tilde\rho_0,R_0e^{-\delta_0},\xi_0-\delta_0,\mu_0}\end{aligned}\tag{8.31}$$

purchè

$$\begin{aligned}\frac{\tilde\kappa'\,\theta_0}{\gamma_0^*\,\tilde\rho_0}\cdot\ \delta_0^{-\kappa^*}&<1\\ \frac{\tilde\kappa'\,\theta_0}{\gamma_0^*\,R_0^2}\,\delta_0^{-\kappa^*}&<1\end{aligned}\tag{8.32}$$

[12]Quello che nell'enunciato di tale Proposizione era chiamato ε_0 qui è 3.

con[13] $\tilde{\kappa}'$ e κ^* opportune.

Stima sulla nuova hamiltoniana Poniamo

$$\begin{aligned} h_0^\dagger(I',\varphi',p',q';\mu) &\equiv \int_0^1 (1-t)\,\{\{h_0,\chi_0^*\},\,\chi_0^*\}\circ\Phi^t_{\chi_0^*}(I',\varphi',p',q';\mu)\,dt \\ f_0^\dagger(I',\varphi',p',q';\mu) &\equiv \int_0^1 \{f_0,\chi_0^*\}\circ\Phi^t_{\chi_0^*}(I',\varphi',p',q';\mu)\,dt \end{aligned}$$

Definiamo

$$f_0^*(I',p'q';\mu) \equiv \sum_{k\in\mathbf{N}} f_{kk0}(I';\mu)(p'q')^k \tag{8.33}$$

$$h_1(I',p'q';\mu) \equiv h_0(I',p'q';\mu)+f_0^*(I',p'q';\mu) \tag{8.34}$$

$$\begin{aligned} f_1(I',\varphi',p',q';\mu) \equiv\ & h_0^\dagger(I',\varphi',p',q';\mu)+f_0^\dagger(I',\varphi',p',q';\mu)+ \\ &+\sum_{\substack{k,j\in\mathbf{N},\ n\in\mathbf{Z}^{\ell-1}\\ |n|\ge N_0}} f_{kjn}(I';\mu){p'}^k{q'}^j\,e^{in\cdot\varphi'} \end{aligned} \tag{8.35}$$

$$H_1(I',\varphi',p',q') \equiv H\circ\Phi^\mu_{\chi_0^*}(I',\varphi',p',q') \tag{8.36}$$

Per la Proposizione 2.20 (usata al primo ordine per f_0 e al secondo per h_0) si ha:

$$\begin{aligned} h_0\circ\Phi^1_{\chi_0^*} &= h_0+\{h_0,\chi_0^*\}+h_0^\dagger \\ f_0\circ\Phi^1_{\chi_0^*} &= f_0+f_0^\dagger \end{aligned}$$

da cui, utilizzando (8.11)

$$H_1(I',\varphi',p',q') = h_1(I',p'q';\mu)+f_1(I',\varphi',p',q';\mu)$$

Utilizzando il Lemma G.3, le (8.29) e (8.13), il fatto che $\tilde{\rho}_0\le R_0^2$, e anche la (8.31) per controllare i domini:

$$\begin{aligned} &\sup_{\Omega^0_{\tilde{\rho}_0/4,R_0e^{-4\delta_0},\xi_0-4\delta_0,\mu_0}} |h_0^\dagger| \le \sup_{\Omega^0_{\tilde{\rho}_0/3,R_0e^{-3\delta_0},\xi_0-3\delta_0,\mu_0}} |\,\{\{h_0,\chi_0^*\},\,\chi_0^*\}\,| \le \\ \le\ &\tilde{\kappa}_1 \sup_{\Omega^0_{\tilde{\rho}_0/2,R_0e^{-2\delta_0},\xi_0-2\delta_0,\mu_0}} |\{h_0,\chi_0^*\}|\cdot \sup_{\Omega^0_{\tilde{\rho}_0,R_0e^{-\delta_0},\xi_0-\delta_0,\mu_0}} |\chi_0^*|\cdot\frac{1}{\tilde{\rho}_0\delta_0} \le \frac{\tilde{\kappa}_1\theta_0^2}{\gamma_0^*\tilde{\rho}_0}\,\delta_0^{-\tilde{\kappa}_2} \\ &\sup_{\Omega^0_{\tilde{\rho}_0/4,R_0e^{-4\delta_0},\xi_0-4\delta_0,\mu_0}} |f_0^\dagger| \le \end{aligned}$$

[13] In effetti, la prima delle (8.32) implica la seconda, in virtù della (8.16)

$$\leq \tilde{\kappa}_1 \sup_{\Omega^0_{\rho_0,R_0,\xi_0,\mu_0}} |f_0| \cdot \sup_{\Omega^0_{\tilde{\rho}_0,R_0e^{-\delta_0},\xi_0-\delta_0,\mu_0}} |\chi_0^*| \cdot \frac{1}{\tilde{\rho}_0\delta_0} \leq \frac{\tilde{\kappa}_1\theta_0^2}{\gamma_0^*\tilde{\rho}_0}\,\delta_0^{-\tilde{\kappa}_2} \tag{8.37}$$

Da (8.14) e (8.37) segue che[14]

$$\begin{aligned}\sup_{\Omega^0_{\tilde{\rho}_0/4,R_0e^{-4\delta_0},\xi_0-4\delta_0,\mu_0}} |f_1| &\leq \kappa_5\theta_0^2\delta_0^{-\kappa_6}\left(\frac{1}{\gamma_0^*\,\tilde{\rho}_0} + \frac{c^2E}{(\gamma_0^*)^2}\right) \leq \\ &\leq \frac{\hat{K}\delta_0^{-\kappa_6}}{\gamma_0^*\tilde{\rho}_0}\,\theta_0^2 \equiv \theta_1\end{aligned} \tag{8.38}$$

Poniamo perciò:

$$\begin{aligned}\rho_1 &\equiv \frac{\tilde{\rho}_0}{4}\\ R_1 &\equiv R_0e^{-4\delta_0}\\ \xi_1 &\equiv \xi_0 - 4\delta_0\end{aligned} \tag{8.39}$$

In questo modo ho che la nuova hamiltoniana è del tipo

$$H_1(I',\varphi',p',q') = h_1(I',p'q';\mu) + f_1(I',\varphi',p',q';\mu)$$

con $\sup_{\Omega^1_{\rho_1,R_1,\xi_1,\mu_0}} |f_1| \leq \theta_1$.

Ricerca di una nuova curva nelle I con frequenza vicina a ω_0 sulla superficie di energia E. Per il Lemma G.14 ho che[15] esistono due funzioni $\mathcal{I}_1^{\bar{I}}(\zeta;\mu)$ e $\alpha(\zeta;\mu)$, reali analitiche per $|\zeta| \leq R_1^2$ e $|\mu| \leq \mu_0$ che verifichino

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_1^{\bar{I}}(0;0) &= \mathcal{I}_0^{\bar{I}}(0;0) = \bar{I}\\ |\mathcal{I}_1^{\bar{I}}(\zeta;\mu) - \mathcal{I}_0^{\bar{I}}(\zeta;\mu)| &\leq \rho_1\\ |\alpha_1(\zeta;\mu)| &\leq c\rho_1\\ \partial_I h_1(\mathcal{I}_1^{\bar{I}}(\zeta;\mu),\zeta;\mu) &= \partial_I h_0(\mathcal{I}_0^{\bar{I}}(\zeta;\mu),\zeta;\mu)\,(1+\alpha_1(\zeta;\mu)) =\\ &= \omega_0\,(1+\alpha_0(\zeta;\mu))\,(1+\alpha_1(\zeta;\mu))\\ h_1(\mathcal{I}_1^{\bar{I}}(\zeta;\mu),\zeta;\mu) &= E\end{aligned} \tag{8.40}$$

[14]Si ricordi che $\tilde{\rho}_0 \leq \rho_0 \leq \gamma_0^*/(c^2E)$. Tale relazione sarà verificata anche al passo $j-$esimo dell'algoritmo, grazie a (8.42): $\tilde{\rho}_j \leq \rho_0/2^j \leq \gamma_0^*/(2^jc^2E) \leq \gamma_j^*/(c^2E)$.

[15]Richiedendo alcune non restrittive condizioni su θ_0 e ρ_0. Nessuna condizione aggiuntiva invece su R_0 e μ_0.

Si osservi che, essendo $\rho_1 \leq \rho_0/4$, $\forall I$ tale che $|I - \mathcal{I}_1^{\bar{I}}(\zeta;\mu)| \leq \rho_1$, si ha

$$|I - \mathcal{I}_0^{\bar{I}}(\zeta;\mu)| \leq |I - \mathcal{I}_1^{\bar{I}}(\zeta;\mu)| + |\mathcal{I}_1^{\bar{I}}(\zeta;\mu) - \mathcal{I}_0^{\bar{I}}(\zeta;\mu)| \leq 2\rho_1 \leq \frac{\rho_0}{2}$$

Si possono quindi ripetere le precedenti argomentazioni ricorsivamente (scrivendo al posto dell'indice 0 l'indice opportuno), dalla (8.9) in poi.

Si badi che la (8.26) è verificata al passo successivo. Infatti, per definizione di h_1 è

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \equiv & \inf_{\Omega^1_{\rho_1,R_1,\xi_1,\mu_0}} |\partial_\zeta h_1| \geq \lambda_0 - \sup_{\Omega^1_{\rho_1,R_1,\xi_1,\mu_0}} |f_0^*| \geq \\
\geq & \ \lambda_0 - \sup \Omega^0_{\rho_0,R_0e^{-\delta_0},\xi_0,\mu_0} |f_0^*| R_0^2 (1 - e^{-2\delta_0}) \geq \\
\geq & \ \lambda_0 - \sum_{i,j\in\mathbf{N}} \frac{\theta_0}{R_0^2(1-e^{-2\delta_0})\, R_0^{i+j}} \,(R_0 e^{-\delta_0})^{i+j} \overset{(8.12)}{\geq} \\
\geq & \ \lambda_0 - \frac{\theta_0\, e^4}{\delta_0^3\, R_0^2}
\end{aligned} \tag{8.41}$$

da cui $\lambda_1 \geq \lambda_0/2$. In modo analogo $D_1 \equiv \sup_{\Omega^1_{\rho_1,R_1,\xi_1,\mu_0}} |\partial^2_{I\zeta} h_1| \leq 2D_0$ e $L_1 \equiv \sup_{\Omega^1_{\rho_1,R_1,\xi_1,\mu_0}} |\partial_I h_1| \leq 2L_0$.

Poniamo anche

$$N_1 \equiv 4\delta_0^{-1} \log \frac{e^2\, 10^{\ell-1}\, (\gamma_1^*)^2}{c^2\, E\, \theta_1} \leq 4N_0$$

con $\gamma_1^* \equiv \min\{\gamma_0^*,\, \lambda_1/4\}$: da cui, se θ_0 è abbastanza piccolo:

$$\begin{aligned}
& \min\left\{\frac{1}{2c},\, \frac{\lambda_1}{12D_1},\, \frac{\lambda_1}{4L_1N_1}\right\} \geq \min\left\{\frac{1}{2c},\, \frac{\lambda_0}{48D_0},\, \frac{\lambda_0}{16L_0N_1}\right\} = \\
= & \ \frac{\lambda_0}{16L_0N_1} \geq \frac{\lambda_0\delta_0}{64L_0N_0} \geq \frac{\gamma}{D_0N_0^\tau} \geq \rho_1
\end{aligned}$$

che mostra che (8.26) vale al passo successivo dell'algoritmo.

Si noti, per inciso, che essendo $\lambda_1 \geq \lambda_0/2$ si ha

$$\gamma_1^* \geq \gamma_0^*/2 \tag{8.42}$$

Iterazione[16] dell'algoritmo. Fissiamo $0 < \delta_0 < \min\{1, \xi_0/4\}$ e sia $\gamma^* \equiv \min\{\gamma, \lambda_0/8\}$. Definiamo ricorsivamente:

$$
\begin{aligned}
\delta_{j+1} &\equiv \frac{\delta_0}{2} = \frac{\delta_0}{2^{j+1}} \\
N_j &\equiv \frac{2}{\delta_j} \log \frac{e^2\,10^{\ell-1}\,(\gamma_j^*)^2}{c^2\,E\,\theta_j} = \frac{2}{\delta_j} \log \frac{1}{\varepsilon_j} \\
\tilde{\rho}_j &\equiv \frac{\gamma}{2A_j^* N_j^\tau} \\
\rho_{j+1} &\equiv \frac{\tilde{\rho}_j}{4} \\
R_{j+1} &\equiv R_j\, e^{-4\delta_j} = R_0\, e^{-4\sum_{i=0}^{j} \delta_i} \\
\xi_{j+1} &\equiv \xi_j - 4\delta_j = \xi_0 - 4\sum_{i=0}^{j} \delta_i \\
\theta_{j+1} &\equiv \frac{\hat{K}\,\delta_j^{-\kappa_6}}{\gamma_j^*\,\tilde{\rho}_j}\,\theta_j^2 \\
\varepsilon_j &\equiv \frac{c^2\,E\,\theta_j}{e^2\,10^{\ell-1}\,(\gamma_j^*)^2}
\end{aligned}
\tag{8.43}
$$

si ottiene

$$H_i(I, \varphi, p, q) = h_i(I, pq; \mu) + f_i$$

con

$$\sup_{\Omega_i} |f_i| \le \theta_i$$

avendo denotato $\Omega_i \equiv \Omega^i_{\rho_i, R_i, \xi_i, \mu_0}$, e

$$\sup |f_i| \equiv \theta_i \quad \sup |\partial_I^2 h_i| \equiv A_i$$

in cui il sup è fatto su Ω_i, e $A_j^* \equiv \max\{A_0,\, A_j\}$, $\gamma_j^* \equiv \min\{\gamma_{j-1}^*,\, \lambda_j/4\}$, dove $\lambda_j \equiv \inf_{\Omega_j} |\partial_\zeta h_j|$.

Affinchè l'algoritmo funzioni devo verificare che la condizione (8.17) sia verificata a ogni passo.

$$\varepsilon_i \ge \frac{\kappa_\diamond\, c^2\, E\, \theta_{i-1}^2}{(\gamma_i^*)^2\, \gamma_{i-1}^*\, \tilde{\rho}_{i-1}} \ge \varepsilon_{i-1}^2 \tag{8.44}$$

[16] "...dove la luce affonda uguale dentro gli specchi all'infinito..."
(D. Campana - *La notte*)

Per cui:

$$\varepsilon_i \geq {\varepsilon_{i-1}}^2 \geq \ldots \geq {\varepsilon_0}^{2^i} \tag{8.45}$$

Da tale relazione si ottiene subito che

$$N_i = \frac{2}{\delta_i} \log\frac{1}{\varepsilon_i} \leq \frac{2^{2i+1}}{\delta_0} \log\frac{1}{\varepsilon_0} \equiv \frac{2^{2i+1}}{\delta_0} \lambda_0 \tag{8.46}$$

Le stime (8.45) e (8.46) sono valide assumendo la condizione (8.17) fino al passo $i-$esimo.

Poniamo anche

$$\mathcal{U}_j(I,\zeta;\mu) \quad \equiv \quad \begin{pmatrix} \partial_I^2 h_j(I,\zeta;\mu) & c\partial_I h_j(I,\zeta;\mu) \\ c\partial_I h_j(I,\zeta;\mu) & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(\ell\times\ell)$$

Voglio dimostrare che

$$\begin{gathered} \text{La (8.17) è vera al passo } \bar{\jmath}. \\ A_{\bar{\jmath}} \leq 2A_0 \\ \lambda_{\bar{\jmath}} \geq \lambda_0/2 \\ \text{La matrice } \mathcal{U}_{\bar{\jmath}}(I,\zeta;\mu) \text{ è invertibile su } \Omega_{\bar{\jmath}}. \\ \text{Esiste una costante } C^* \text{ tale che } \varepsilon_j \leq (C^*\,\varepsilon_0)^{2^{\bar{\jmath}}}. \end{gathered} \tag{8.47}$$

Dimensionalmente $C^* \sim \dfrac{A_0\,\lambda_0^\tau}{cE}$, cosí che la (8.1) implica

$$\Xi\, C^*\,\varepsilon_0\,\lambda_0^{\tilde{\Lambda}} \leq 1$$

Si osservi che la terza di (8.47) implica anche che $\gamma^* \leq \gamma^*_{\bar{\jmath}}$.

Dimostro (8.47) per induzione, assumendola vera per $i = 0,\ldots,\bar{\jmath}-1$. Per l'ipotesi induttiva e la (8.46) si ha:

$$\tilde{\rho}_i = \frac{\gamma}{2A_i^* N_i^\tau} \geq \frac{\gamma}{\kappa_7^i A_0^* \lambda_0^\tau} = \frac{\gamma}{\kappa_7^i A_0 \lambda_0^\tau} \tag{8.48}$$

Dall'ipotesi induttiva e (8.48) si ottiene:

$$\theta_{\bar{\jmath}} = \frac{\hat{K}\delta_{\bar{\jmath}-1}^{-\kappa_6}}{\gamma^*_{\bar{\jmath}-1}\tilde{\rho}_{\bar{\jmath}-1}}\,\theta^2_{\bar{\jmath}-1} \leq \frac{\kappa_8^{\bar{\jmath}}}{(\gamma^*_{\bar{\jmath}-1})^2}\theta^2_{\bar{\jmath}-1}\,A_0\,\lambda_0^\tau$$

da cui, essendo per brevità $\beta \sim A_0\lambda_0^\tau\,c^{-1}\,E^{-1}$:

$$\varepsilon_{\bar{\jmath}} \leq \frac{c^2 E}{e^2 10^{\ell-1}\,(\gamma^*_{\bar{\jmath}})^2} \cdot \frac{\kappa_8^{\bar{\jmath}}}{(\gamma^*_{\bar{\jmath}-1})^2}\theta^2_{\bar{\jmath}-1}\,A_0\,\lambda_0^\tau \overset{(8.42)}{\leq} \kappa_8^{\bar{\jmath}}\,\beta\varepsilon^2_{\bar{\jmath}-1}$$

e dunque

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\bar{\jmath}} &\leq \kappa_8^{\bar{\jmath}} \beta \varepsilon_{\bar{\jmath}-1}^2 \leq \ldots \leq \\
&\leq \kappa_8^{\sum_{n=0}^{\nu-1} 2^n(\bar{\jmath}-1-n)} \beta^{\sum_{n=0}^{\nu-1} 2^n} \varepsilon_{\bar{\jmath}-\nu}^{2^\nu} \leq \ldots \\
&\leq \kappa_8^{\sum_{n=0}^{\bar{\jmath}-1} 2^n(\bar{\jmath}-1-n)} \beta^{\sum_{n=0}^{\bar{\jmath}-1} 2^n} \varepsilon_0^{2^{\bar{\jmath}}} = \\
&= \left[\kappa_8^{\sum_{m=2}^{\bar{\jmath}} 2^{-m}(m-1)} \beta^{\sum_{m=1}^{\bar{\jmath}} 2^{-m}} \varepsilon_0\right]^{2^{\bar{\jmath}}} \leq \\
&\leq \left[\kappa_8^{\kappa_9} \, \beta \, \varepsilon_0\right]^{2^{\bar{\jmath}}}
\end{aligned} \tag{8.49}$$

che prova l'ultima delle (8.47).

Si osservi ora che, $\forall j$,

$$\sup_{\Omega^j_{\rho_j, R_j e^{-\delta_j/2}, \xi_j, \mu_0}} |f_j^*| \overset{(8.33) \text{ e } (8.8)}{\leq} \theta_j \sum_{k \in \mathbf{N}} e^{-k\delta_j} \overset{(8.12)}{\leq} \frac{\theta_j \, e}{\delta_j} \tag{8.50}$$

Quindi, assumendo anche la non restrittiva condizione $\gamma \leq c^2 \, R_\infty^2 \, E$:

$$\begin{aligned}
A_{\bar{\jmath}} &= \sup_{\Omega_{\bar{\jmath}}} |\partial_I^2 h_{\bar{\jmath}}| = \sup_{\Omega_{\bar{\jmath}}} |\partial_I^2 (h_{\bar{\jmath}-1} + f_{\bar{\jmath}-1}^*)| \leq \\
&\leq A_{\bar{\jmath}-1} + \sup_{\Omega_{\bar{\jmath}}} |\partial_I^2 f_{\bar{\jmath}-1}^*| \leq \\
&\leq A_{\bar{\jmath}-1} + \kappa_9 \frac{\sup_{\Omega^{\bar{\jmath}-1}_{\rho_{\bar{\jmath}-1}, R_{\bar{\jmath}-1} e^{-\delta_{\bar{\jmath}-1}/2}, \xi_{\bar{\jmath}-1}, \mu_0}} |f_{\bar{\jmath}-1}^*|}{(\rho_{\bar{\jmath}-1} - \rho_{\bar{\jmath}})^2} \overset{(8.50)}{\leq} \\
&\leq A_{\bar{\jmath}-1} + \kappa_{10} \frac{\theta_{\bar{\jmath}-1}}{\rho_{\bar{\jmath}-1}^2 \, \delta_{\bar{\jmath}-1}^{\kappa_{11}}} \leq A_{\bar{\jmath}-1} + \kappa_{12}^{\bar{\jmath}-1} \frac{\varepsilon_{\bar{\jmath}-1} (\gamma_{\bar{\jmath}-1}^*)^2}{\tilde{\rho}_{\bar{\jmath}-2} c^2 \, E} \overset{(8.48)}{\leq} \\
&\leq A_{\bar{\jmath}-1} + \kappa_{13}^{\bar{\jmath}-1} \frac{(C^* \varepsilon_0)^{2^{\bar{\jmath}-1}}}{c^2 \, E} \lambda_0^{2\tau} \, A_0^2 \leq \\
&= A_{\bar{\jmath}-1} + (\kappa_{14} \, C^* \varepsilon_0 \, \lambda_0^\tau)^{2^{\bar{\jmath}-1}} \; A_0 \leq \\
&\leq A_{\bar{\jmath}-1} + \frac{A_0}{2^{\bar{\jmath}}}
\end{aligned}$$

in cui, nell'ultimo passaggio ho usato (8.1). Ripetendo tale disuguaglianza si giunge a

$$A_{\bar{\jmath}} \;\leq\; A_{\bar{\jmath}-1} + \frac{A_0}{2^{\bar{\jmath}}} \leq \ldots \leq A_{\bar{\jmath}-n} + \sum_{i=\bar{\jmath}-n}^{\bar{\jmath}-1} \frac{A_0}{2^{i+1}} \leq$$

$$\leq \quad \ldots \leq A_0 + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty} A_0\, 2^{-i} \leq 2A_0 \tag{8.51}$$

Ciò dimostra la seconda delle (8.47). Inoltre, da (8.43) e dall'ultima delle (8.47), già dimostrata, ottengo che

$$N_{\bar{\jmath}} \geq \frac{(4/3)^{2\bar{\jmath}+1}}{\delta_0}\,\log\frac{1}{C^*\,\varepsilon_0} \tag{8.52}$$

quindi, assumendo alcune condizioni non restrittive di piccolezza di γ e θ_0, abbiamo che:

$$\begin{aligned}
& 2A^*_{\bar{\jmath}}\, N^{\tau}_{\bar{\jmath}}\ \min\{\rho_{\bar{\jmath}}/2,\ R^2_{\bar{\jmath}}\} \geq \\
\geq\ & 2A_0\, N^{\tau}_{\bar{\jmath}}\ \min\{\tilde{\rho}_{\bar{\jmath}-1}/4,\ R^2_{\infty}\} = \\
=\ & 2A_0\, N^{\tau}_{\bar{\jmath}}\ \min\left\{\frac{\gamma}{8A_{\bar{\jmath}-1}N^{\tau}_{\bar{\jmath}-1}},\ R^2_{\infty}\right\} = 2A_0\, N^{\tau}_{\bar{\jmath}}\ \frac{\gamma}{8A_{\bar{\jmath}-1}N^{\tau}_{\bar{\jmath}-1}} \overset{(8.46)\ \mathrm{e}\ (8.52)}{\geq} \\
\geq\ & \frac{A_0\gamma}{4A_{\bar{\jmath}-1}}\left(4\,\frac{\log\,(C^*\,\varepsilon_0)^{-1}}{\log C^* + \log\,(C^*\,\varepsilon_0)^{-1}}\right)^{\tau} \geq \\
\geq\ & \frac{\gamma}{8}\left(4\,\frac{\log\,(C^*\,\varepsilon_0)^{-1}}{4/3\,\cdot\,\log\,(C^*\,\varepsilon_0)^{-1}}\right)^{\tau} \geq \gamma
\end{aligned}$$

avendo assunto $\tau > 2$. Questo prova che la condizione (8.17) è verificata al passo $\bar{\jmath}$–esimo. E poi[17]:

$$\begin{aligned}
& \sup_{\Omega_j}|\mathcal{U}_j - \mathcal{U}_{j-1}| \leq \kappa_{16}(\sup_{\Omega_j}|\partial^2_I h_j - \partial^2_I h_{j-1}| + c\sup_{\Omega_j}|\partial_I h_j - \partial_I h_{j-1}|) = \\
=\ & \kappa_{16}(\sup_{\Omega_j}|\partial^2_I f^*_{j-1}| + c\sup_{\Omega_j}|\partial_I f^*_{j-1}|) \leq \\
\leq\ & \kappa_{17}(\rho^{-2}_{j-1}\sup_{\Omega_{j-1}}|f^*_{j-1}| + c\rho^{-1}_{j-1}\sup_{\Omega_{j-1}}|f^*_{j-1}|) \overset{(8.48)\ \mathrm{e}\ (8.50)}{\leq} \\
\leq\ & \kappa^{j-1}_{18}\,\theta_{j-1}\cdot\left(\left(\frac{A_0\lambda^{\tau}_0}{\gamma}\right)^2 + c\frac{A_0\lambda^{\tau}_0}{\gamma}\right) \leq \\
\leq\ & 2\kappa^{j-1}_{18}\,\theta_{j-1}\left(\frac{A_0\lambda^{\tau}_0}{\gamma}\right)^2 \leq \\
\leq\ & \kappa_{19}\,\kappa^{j-1}_{18}\,(C^*\,\varepsilon_0)^{2^{j-1}}\left(\frac{A_0\lambda^{\tau}_0}{\gamma}\right)^2\frac{\gamma^2}{c^2\,E} \overset{(8.1)}{\leq} B_0\frac{1}{3^j}
\end{aligned}$$

[17]Assumendo la condizione non restrittiva $A_0\lambda_0 \geq c\gamma$.

da cui

$$
\begin{aligned}
\sup_{\Omega_{\bar{\jmath}}} |\mathcal{U}_{\bar{\jmath}} - \mathcal{U}| &\leq \sum_{i=1}^{\bar{\jmath}} \sup_{\Omega_{\bar{\jmath}}} |\mathcal{U}_i - \mathcal{U}_{i-1}| \leq \\
\leq \quad & B_0 \sum_{i=1}^{\infty} 3^{-i} = \frac{B_0}{2}
\end{aligned}
\tag{8.53}
$$

per questo, dal Lemma G.12, otteniamo che $\mathcal{U}_{\bar{\jmath}}$ è invertibile. Infine, da (8.41):

$$
\lambda_{\bar{\jmath}} \geq \lambda_{\bar{\jmath}-1} - \frac{\tilde{K}^{\bar{\jmath}} \theta_{\bar{\jmath}}}{R_\infty^2} \geq \lambda_{\bar{\jmath}-1} - \frac{\bar{K} \tilde{K}^{\bar{\jmath}} (C^* \varepsilon_0)^{2^{\bar{\jmath}}}}{R_\infty^2} \geq \lambda_{\bar{\jmath}-1} - \frac{\lambda_0}{4^{\bar{\jmath}}}
$$

con $\bar{K}$ opportuna, se θ_0 è piccolo. Perciò

$$
\lambda_{\bar{\jmath}} \geq \lambda_{\bar{\jmath}-1} - \frac{\lambda_0}{2^{\bar{\jmath}}} \geq \ldots \geq \lambda_0 - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda_0}{2^{i+1}} \geq \frac{\lambda_0}{2}
$$

Questo conclude la dimostrazione di (8.47)

Passaggio al limite. Da (8.40) si ha:

$$
\begin{aligned}
\sup_{|\zeta| \leq R_\infty^2,\, |\mu| \leq \mu_0} & |\mathcal{I}_{j+m}^{\bar{I}} - \mathcal{I}_{j+m}^{\bar{I}}| \leq \sum_{i=j}^{m-1} |\mathcal{I}_{i+1}^{\bar{I}} - \mathcal{I}_i^{\bar{I}}| \leq \\
\leq \quad & \sum_{i=j}^{m-1} \rho_i \leq \sum_{i=j}^{\infty} \frac{\rho_0}{2^i} \leq \frac{2\rho_0}{2^j}
\end{aligned}
$$

il che prova che $\mathcal{I}_j^{\bar{I}}$ tende a una $\mathcal{I}_\infty^{\bar{I}}$ reale analitica su $|\zeta| \leq R_\infty^2$ e $|\mu| \leq \mu_0$.

Denotiamo $z \equiv (I, \varphi, p, q)$ e

$$
\Phi_j(z) \equiv \Phi^1_{\chi_j^*} \circ \ldots \circ \Phi^1_{\chi_0^*}(z)
$$

Sia anche $\eta \sim C^* \varepsilon_0 \lambda_0^\Lambda \leq 1/4$. Definiamo la derivata dimensionale

$$
\hat{\partial}^\alpha \equiv \Delta^{-1} c^{-|\alpha_I| - (\alpha_p + \alpha_q)/2} \partial_I^{\alpha_I} \partial_\varphi^{\alpha_\varphi} \partial_p^{\alpha_p} \partial_q^{\alpha_q}
$$

essendo $\alpha = (\alpha_I, \alpha_\varphi, \alpha_p, \alpha_q) \in \mathbf{N}^{(\ell-1)+(\ell-1)+1+1}$, e Δ una costante con le dimensioni della funzione da derivare. Sia

$$
\mathcal{X} \equiv \{(I, \varphi, p, q) \in \mathbf{R}^{2\ell} \ \text{ tc}
$$

$$|I-\bar I|\le\rho,\ |\Im\varphi|\le\xi,\ |p|\le R,\ |q|\le R\}$$

Otteniamo, denotando per brevità

$$\{\beta^1+\beta^2=\alpha\}\equiv\{\beta_I^1+\beta_I^2=\alpha_I,\ \beta_\varphi^1+\beta_\varphi^2=\alpha_\varphi,\ \beta_p^1+\beta_p^2=\alpha_p,\ \beta_q^1+\beta_q^2=\alpha_q\}$$

e ricordando la stima sulle derivate del Lemma G.15:

$$\begin{aligned}
&\sup_{\mathbf{R}^{2\ell}}|\hat\partial^\alpha\chi_j^*|\le\\
\le\ & E^{-1}c^{-|\alpha_I|-(\alpha_p+\alpha_q)/2}\sup_{\mathcal{X}}\sum_{\beta^1+\beta^2=\alpha}\frac{\alpha_I!}{\beta_I^1!\,\beta_I^2!}\,\frac{\alpha_\varphi!}{\beta_\varphi^1!\,\beta_\varphi^2!}\,\frac{\alpha_p!}{\beta_p^1!\,\beta_p^2!}\,\frac{\alpha_q!}{\beta_q^1!\,\beta_q^2!}\cdot\\
&\cdot|\partial^{(\beta_I^1,\beta_\varphi^1,\beta_p^1,\beta_q^1)}\chi_j|\,|\partial_I^{\beta_I^2}\psi_j^{[I]}|\,|\partial_I^{\beta_\varphi^2}\psi_j^{[\varphi]}|\,|\partial_I^{\beta_p^2}\psi_j^{[p]}|\,|\partial_I^{\beta_q^2}\psi_j^{[q]}|\le\\
\le\ & \kappa_{20}\,E^{-1}\,c^{-|\alpha_I|-(\alpha_p+\alpha_q)/2}\sum_{\beta^1+\beta^2=\alpha}(|\alpha|!)^{\kappa_{21}}\sup_{\Omega_{\mathcal{I}_0,\tilde\rho_0,R_0e^{-\delta_0},\xi_0-\delta_0,\mu_0}}|\chi_j|\cdot\\
&\cdot\rho_0^{-|\beta_I^1|-|\beta_I^2|}\,R_0^{-|\beta_p^1|-|\beta_p^2|-|\beta_q^1|-|\beta_q^2|}\overset{(8.27)\text{ e Lemma }G.1}{\le}\\
\le\ & \kappa_{22}^j\,E^{-1}\,c^{-|\alpha_I|-(\alpha_p+\alpha_q)/2}\,(|\alpha|!)^{\kappa_{23}}\,\rho_0^{-|\alpha_I|}\,R_0^{-\alpha_p-\alpha_q}\,\theta_j\,(\gamma^*)^{-1}\le\\
\le\ & \kappa_{24}^j\,(|\alpha|!)^{\kappa_{23}}\,\gamma^*\,E^{-2}\,c^{-2}\varepsilon_j\le\\
\le\ & \kappa_{25}^j\,(|\alpha|!)^{\kappa_{23}}\varepsilon_j\le\kappa_{25}^j\,(|\alpha|!)^{\kappa_{23}}\,(C^*\,\varepsilon_0)^{2^j}\le\\
\le\ & (|\alpha|!)^{\kappa_{23}}\,(\kappa_{25}\,C^*\,\varepsilon_0)^{2^j}\le(|\alpha|!)^{\kappa_{23}}\,\eta^{2^j}
\end{aligned}\tag{8.54}$$

Per le Equazioni di Hamilton è:

$$\begin{aligned}
&\Phi^1_{\chi_j^*}(z)-z=\Big(-\int_0^1\partial_\varphi\chi_j^*\left(\Phi^t_{\chi_j^*}(z)\right)\,dt,\ \int_0^1\partial_I\chi_j^*\left(\Phi^t_{\chi_j^*}(z)\right)\,dt,\\
&-\int_0^1\partial_q\chi_j^*\left(\Phi^t_{\chi_j^*}(z)\right)\,dt,\ \int_0^1\partial_p\chi_j^*\left(\Phi^t_{\chi_j^*}(z)\right)\,dt\Big)
\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}
&\sup_{\mathbf{R}^{2\ell}}|\hat\partial^\alpha\left(\Phi^1_{\chi_j^*}(z)-z\right)|\le\sup_{\substack{|\beta|=|\alpha|+1\\ \mathbf{R}^{2\ell}}}|\hat\partial^\beta\chi_j^*|\overset{(8.54)}{\le}(|\alpha|!+1)^{\kappa_{23}}\,\eta^{2^j}\le\\
\le\ & \kappa_{26}\,(|\alpha|!)^{\kappa_{23}}\,\eta^{2^j}
\end{aligned}\tag{8.55}$$

che implica

$$\sup_{\mathbf{R}^{2\ell}}|\hat\partial^\alpha\Phi^1_{\chi_j^*}|\le1+\kappa_{26}\,(|\alpha|!)^{\kappa_{23}}\,\eta^{2^j}\le2\,(|\alpha|!)^{\kappa_{27}}\tag{8.56}$$

Siano ora $F = (F_1, \ldots, F_N)$ e $G = (G_1, \ldots, G_N)$ funzioni $\mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^N, \mathbf{R}^N)$. Si dimostra, per induzione su $|\alpha|$, che, $\forall 1 \leq m \leq N$

$$
\begin{aligned}
& \hat{\partial}^\alpha \left(F \circ G(z)\right)_m = \\
= & \sum_{\substack{1\leq|\beta|\leq|\alpha|,\ 1\leq k\leq|\alpha| \\ 1\leq|\sigma^1|,\ldots,|\sigma^k|\leq|\alpha|-|\beta|+1 \\ |\sigma^1|+\ldots+|\sigma^k|=|\alpha| \\ 1\leq i_1,\ldots,i_k\leq N}} a_{\alpha\beta\sigma^1\ldots\sigma^k i_1\ldots i_k}\, \hat{\partial}^\beta F_m(G(z))\, \hat{\partial}^{\sigma^1} G_{i_1} \ldots \hat{\partial}^{\sigma^k} G_{i_k}
\end{aligned}
\tag{8.57}
$$

con $a_{\alpha\beta\sigma^1\ldots\sigma^k i_1\ldots i_k} \geq 0$ e $\sum a_{\alpha\beta\sigma^1\ldots\sigma^k i_1\ldots i_k} \leq (|\alpha| + N - 1)!$. Affermo poi che

$$
\sup_{\mathbf{R}^{2\ell}} |\hat{\partial}^\alpha \left(\Phi^1_{\chi^*_i} \circ \ldots \circ \Phi^1_{\chi^*_0}\right)| \leq \kappa_{27} \left(|\alpha|!\right)^{2\kappa_{27}(i+1)} \tag{8.58}
$$

Per induzione su i infatti: la (8.56) è la base e il passo induttivo è:

$$
\begin{aligned}
& \sup_{\mathbf{R}^{2\ell}} |\hat{\partial}^\alpha \left(\Phi^1_{\chi^*_i} \circ \ldots \circ \Phi^1_{\chi^*_0}\right)| \overset{(8.57),\ (8.56)\ \text{e Lemma } G.1}{\leq} \\
\leq \quad & (|\alpha|!)^{\tilde{\kappa}_{27}} \kappa_{27}^{|\alpha|} \max_{\substack{|\beta|\leq|\alpha| \\ |\sigma^1|+\ldots+|\sigma^k|=|\alpha|}} (|\beta|!)^{\kappa_{27}} \left(|\sigma^1|! \ldots |\sigma^k|!\right)^{2\kappa_{27} i} \overset{\text{Lemma } E.3}{\leq} \\
\leq \quad & \kappa_{27} \left(|\alpha|!\right)^{\kappa_{27}} \cdot \left(|\alpha|!\right)^{\kappa_{27}} \cdot \left(|\alpha|!\right)^{2\kappa_{27} i}
\end{aligned}
$$

dimostrando (8.58). Dico anche che:

$$
\sup_{\mathbf{R}^{2\ell}} |\hat{\partial}^\alpha \left(\Phi^1_{\chi^*_i} \circ \ldots \circ \Phi^1_{\chi^*_0}(z) - z\right)| \leq \kappa_{28} \sum_{n=0}^{i} \eta^{2^n} \cdot \left(|\alpha|!\right)^{\kappa_{28}(n+1)} \tag{8.59}
$$

La (8.59) si prova per induzione su i: la (8.55) fornisce la base dell'induzione. Per il passo induttivo, denotando $\Delta_{\chi^*_i}(z) \equiv \Phi^1_{\chi^*_i}(z) - z$, si ha:

$$
\begin{aligned}
& |\hat{\partial}^\alpha \left(\Phi^1_{\chi^*_i} \circ \ldots \circ \Phi^1_{\chi^*_0}(z) - z\right)| \leq |\hat{\partial}^\alpha \left(\Phi^1_{\chi^*_{i-1}} \circ \ldots \circ \Phi^1_{\chi^*_0}(z) - z\right)| + \\
& + |\hat{\partial}^\alpha \Delta_{\chi^*_i} \circ \Phi^1_{\chi^*_{i-1}} \circ \ldots \circ \Phi^1_{\chi^*_0}(z)| \overset{(8.57),\ (8.58),\ \text{Lemma G.1 e } (8.55)}{\leq} \\
\leq \quad & \kappa_{28} \sum_{n=0}^{i-1} \eta^{2^n} \cdot \left(|\alpha|!\right)^{\kappa_{28}(n+1)} + \kappa_{28} \left(|\alpha|!\right)^{\kappa_{28}(i+1)} \eta^{2^i} = \\
= \quad & \kappa_{28} \sum_{n=0}^{i} \eta^{2^n} \cdot \left(|\alpha|!\right)^{\kappa_{28}(n+1)}
\end{aligned}
$$

Facciamo la seguente osservazione: se $F(x) \equiv \eta^{2^x} a^x$, essendo $a \geq 2$ una costante fissata, si ha:

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in[0,\infty)} F(x) = F\left(\frac{1}{\log 2}\,\log\frac{\log a}{\log 2\ \log(1/\eta)}\right) \leq \\
\leq\ & \eta^{\log a/(\log 2\ \log(1/\eta))} a^{2\log(2\log a)} \leq a^{2\log(2a)} \equiv \mathcal{E}(a) \qquad (8.60)
\end{aligned}$$

Anche nel caso $a = 1$ si ha comunque che $F(x) \leq 1 = \mathcal{E}(1)$. La (8.59) e la (8.60) conducono , definendo $\tilde{\mathcal{E}}(k) \equiv \mathcal{E}\left((k!)^{\kappa_{28}}\right)$ e $\mathcal{E}^\star(k) \equiv 6\kappa_{28}\,(k!)^{2\kappa_{28}}\tilde{\mathcal{E}}(k)$, $\forall k \in \mathbf{N}$, a:

$$\begin{aligned}
&\sup_{\mathbf{R}^{2\ell}} |\hat{\partial}^\alpha\left(\Phi^1_{\chi_i^*}\circ\ldots\circ\Phi^1_{\chi_0^*}(z) - z\right)| \leq \\
\leq\ & \kappa_{28}\,\eta\,(|\alpha|!)^{\kappa_{28}} + \kappa_{28}\,(|\alpha|!)^{2\kappa_{28}}\sum_{n=1}^{\infty}\eta^{2^{n-1}}\eta^{2^{n-1}}(|\alpha|!)^{\kappa_{28}(n-1)} \leq \\
\leq\ & \kappa_{28}\,\eta\,(|\alpha|!)^{\kappa_{28}} + \kappa_{28}\,(|\alpha|!)^{2\kappa_{28}}\,\tilde{\mathcal{E}}(|\alpha|)\sum_{n=1}^{\infty}\eta^{2^{n-1}} \leq \mathcal{E}^\star(|\alpha|)\,\eta \qquad (8.61)
\end{aligned}$$

E anche

$$\begin{aligned}
&\sup_{\mathbf{R}^{2\ell}} |\hat{\partial}^\alpha\left(\Phi^1_{\chi_{j+1}^*}\circ\ldots\circ\Phi^1_{\chi_0^*}(z) - \Phi^1_{\chi_j^*}\circ\ldots\circ\Phi^1_{\chi_0^*}(z)\right)| = \\
=\ & \sup_{\mathbf{R}^{2\ell}} |\hat{\partial}^\alpha\Delta_{\chi_{j+1}^*}\circ\Phi^1_{\chi_j^*}\circ\ldots\circ\Phi^1_{\chi_0^*}(z)| \overset{(8.57),\,(8.58),\,\text{Lemma G.1 e }(8.55)}{\leq} \\
\leq\ & (\kappa_{29}\,|\alpha|!)^{\kappa_{29}(j+1)}\,\eta^{2^{j+1}} = (\kappa_{29}\,|\alpha|!)^{\kappa_{29}}\,(\kappa_{29}\,|\alpha|!)^{\kappa_{29}j}\,\eta^{2^j}\,\eta^{2^j} \overset{(8.60)}{\leq} \\
\leq\ & \mathcal{F}(|\alpha|)\,\eta^{2^j} \qquad (8.62)
\end{aligned}$$

dove $\mathcal{F}(k) \equiv (\kappa_{29}\,k!)^{\kappa_{29}}\,\mathcal{E}\left((\kappa_{29}\,k!)^{\kappa_{29}}\right)$; da cui

$$\begin{aligned}
&\sup_{\mathbf{R}^{2\ell}} |\hat{\partial}^\alpha\left(\Phi_{j+m} - \Phi_j\right)| \leq \sum_{n=1}^{m}\sup_{\mathbf{R}^{2\ell}} |\hat{\partial}^\alpha\left(\Phi_{j+n} - \Phi_{j+n-1}\right)| \leq \\
\leq\ & \mathcal{F}(|\alpha|)\sum_{n=1}^{m}\eta^{2^{j+n-1}} \leq \kappa_{30}\mathcal{F}(|\alpha|)\eta^{2^j} \qquad (8.63)
\end{aligned}$$

Da (8.63) segue che Φ_j converge[18] in metrica C^∞ a una trasformazione canonica $\Phi \in C^\infty(\mathbf{R}^{2\ell}, \mathbf{R}^{2\ell})$. La dipendenza di Φ dal parametro μ è analitica

[18]Lo spazio delle funzioni limitate e C^∞ dotato della metrica

$$d(F,G) \equiv \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,\mathcal{E}^\star(k)\,\mathcal{F}(k)}\sum_{|\alpha|=k}\frac{\sup|\hat{\partial}^\alpha(F-G)|}{1+\sup|\hat{\partial}^\alpha(F-G)|}$$

per $|\mu| \le \mu_0$, in quanto la convergenza è uniforme per $\mu \in \mathbf{C}$, $|\mu| \le \mu_0$. La (8.61) mostra che Φ è $C^\infty-$vicina all'identità.

Per quanto riguarda la dimostrazione di (8.3), poniamo, ricordando (8.40),

$$\alpha_\infty(\zeta;\mu) \equiv \prod_{j=0}^{\infty} (1+\alpha_j(\zeta;\mu)) - 1 \qquad \forall|\zeta| \le R_\infty^2,\ |\mu| \le \mu_0$$

(tale produttoria converge uniformemente, poichè $|\alpha_j| \le c\rho_j \le c\rho_0/4^j$.) Inoltre, $\forall|x| \le 2$:

$$|e^x - 1| \le |\int_0^x e^y\, dy| \le e^2|x| \tag{8.64}$$

e poi

$$\sum |\log(1+\alpha_j)| \le \kappa \sum |\alpha_j| \le \sum \frac{c\kappa\rho_0}{4^j} = 4\kappa c\rho_0/3 \le 2 \tag{8.65}$$

Da (8.64) e (8.65):

$$\begin{aligned} |\alpha_\infty| &= |\prod(1+\alpha_j) - 1| = |\exp\Big(\sum \log(1+\alpha_j)\Big) - 1| \le \\ \le &\ e^2 \sum |\log(1+\alpha_j)| \le 4\kappa e^2 c\rho_0/3 \le \rho \end{aligned}$$

se ρ_0 è stato fissato opportunamente piccolo.

Misura dei tori conservati. Sia $\bar{x}$ tale che $\forall x \ge \bar{x}$ si abbia $x\,(\log x)^{-\Lambda} \ge 1/\Big(\Xi e^2 10^{\ell-1}\Big)$. Poniamo $\hat{\gamma} \equiv \frac{c}{e}\sqrt{\frac{x_0 E\theta_0}{c'(0,\ell-1)}} = O(\sqrt{\theta_0})$. Se θ_0 è abbastanza piccolo, $\hat{\gamma} \le \lambda_0$. Inoltre $\hat{\gamma}$ verifica, per costruzione, la (8.1), per cui $\hat{\gamma}$ è nell'insieme su cui si fa l'unione in (8.4).

Fissiamo ora $|\mu| \le \mu_0$. La matrice

$$\mathcal{U}_\infty = \begin{pmatrix} \partial_I^2 h_\infty & c\partial_I h_\infty \\ c\partial_I h_\infty & 0 \end{pmatrix}$$

è invertibile su Ω grazie a (8.53) e al Lemma G.12. Non è restrittivo assumere anche che $\partial_{I_{\ell-1}} h_\infty \ne 0$ su Ω. Sia $g \equiv \inf|\partial_{I_{\ell-1}} h_\infty| > 0$. Denotando con l'apice "$\bullet$" le prime $\ell-2$ componenti di un vettore $(\ell-1)-$dimensionale, per il Teorema del Dini esiste una $\iota : \mathbf{R}^{\ell-2} \longrightarrow \mathbf{R}$ tale che

$$h_\infty(I,0;\mu) = E \iff I = (I^\bullet,\ \iota(I^\bullet))$$

è completo, cfr. [C], pag. 125.

Il limite di trasformazioni canoniche è una trasformazione canonica, in quanto il limite di matrici simplettiche è una matrice simplettica.

Inoltre, come fatto nella Proposizione 6.2 si vede che

$$\mathcal{A}(I^\bullet) \equiv \frac{\partial_{I^\bullet} h_\infty(I^\bullet, \iota(I^\bullet), 0; \mu)}{\partial_{I_{\ell-1}} h_\infty(I^\bullet, \iota(I^\bullet), 0; \mu)}$$

è un diffeomorfismo.

Per costruzione, se $I = \mathcal{I}_\infty^{\bar{I}}(0;\mu)$, allora $h_\infty(I, 0; \mu) = E$ e $\partial_I h_\infty(I, 0; \mu) = \omega_0(\bar{I})\ (1 + \alpha_\infty(0;\mu))$.

Viceversa, se $|I - \widehat{I}| \leq \rho/2$, $h_\infty(I, 0; \mu) = E$ e $\partial_I h_\infty(I, 0; \mu) = \omega_0(\bar{I})\ (1 + \alpha_\infty(0;\mu))$, allora

$$\mathcal{A}(I^\bullet) = \frac{\omega_0^\bullet}{(\omega_0)_{\ell-1}} = \mathcal{A}(\mathcal{I}_\infty^{\bar{I}}(0;\mu)^\bullet) \text{ e } I_{\ell-1} = \iota(I^\bullet)$$

da cui, essendo $\mathcal{A}$ un diffeomorfismo

$$I^\bullet = \mathcal{I}_\infty^{\bar{I}}(0;\mu)^\bullet \text{ e } I_{\ell-1} = \iota(I^\bullet) = \iota\left(\mathcal{I}_\infty^{\bar{I}}(0;\mu)^\bullet\right) = \left(\mathcal{I}_\infty^{\bar{I}}(0;\mu)\right)_{\ell-1}$$

Ciò prova che

$$I = \mathcal{I}_\infty^{\bar{I}}(0;\mu) \iff h_\infty(I, 0; \mu) = E \text{ e } \partial_I h_\infty(I, 0; \mu) = \omega_0(\bar{I})\ (1 + \alpha_\infty(0;\mu))$$

che implica che

$$\begin{aligned} \Omega_\mu^* = \{ & I = (I^\bullet,\ \iota(I^\bullet))\ \mathrm{tc} \\ & \partial_I h_\infty\ (I^\bullet\ \iota(I^\bullet, 0; \mu)) = \omega_0(\bar{I})\ (1 + \alpha_\infty(0;\mu)),\ \bar{I} \in \mathcal{D}_\tau \} \end{aligned} \tag{8.66}$$

Siano

$$\mathcal{R}_\tau^\gamma \equiv \{\omega \in \mathbf{R}^{\ell-1}\ (\gamma, \tau)\text{−diofantini}\}$$

e $\mathcal{R}_\tau^* \equiv \bigcup \mathcal{R}_\tau^{\gamma(1+c\rho)/g}$, dove l'unione è fatta sui γ che verificano la condizione (8.1). Si osservi anche che, denotando con $\mathcal{B}$ il diffeomorfismo inverso di $\mathcal{A}$

$$\begin{aligned} & \{I^\bullet \text{ tc } |I^\bullet - \widehat{I}^\bullet| \leq \rho/2 \text{ e} \\ & \partial_I h_\infty\ (I^\bullet, \iota(I^\bullet), 0; \mu) \cdot (1 + \alpha_\infty(0;\mu))^{-1} \notin \mathcal{R}_\tau\} \subseteq \\ \subseteq\ & \{I^\bullet = \mathcal{B}(\omega^*) \text{ con } (\omega^*, 1) \notin \mathcal{R}_\tau^*\} \end{aligned} \tag{8.67}$$

Allora, se definiamo $\phi(I^\bullet) \equiv (I^\bullet, \iota(I^\bullet))$,

$$\begin{aligned} & \mathrm{mis}_E\{I = (I^\bullet,\ \iota(I^\bullet))\ \mathrm{tc} \\ & \partial_I h_\infty\ (I^\bullet\ \iota(I^\bullet), 0; \mu) = \omega\ (1 + \alpha_\infty(0;\mu)),\ \omega \notin \mathcal{R}_\tau\} = \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\{\partial_I h_\infty \cdot (1+\alpha_\infty)^{-1} \notin \mathcal{R}_\tau\}} \left(\sum_{j=1}^{\ell-1} \det{}^2 \frac{\partial(\phi_1, \ldots, \phi_{j-1}, \phi_{j+1}, \ldots, \phi_{\ell-1})}{\partial I^\bullet} \right)^{1/2} dI^\bullet \overset{(8.67)}{\leq} \\
&\leq \int_{\{I^\bullet = \mathcal{B}(\omega^*),\ (\omega^*,1) \notin \mathcal{R}^*_\tau\}} \left(\sum_{j=1}^{\ell-1} \det{}^2 \frac{\partial(\phi_1, \ldots, \phi_{j-1}, \phi_{j+1}, \ldots, \phi_{\ell-1})}{\partial I^\bullet} \right)^{1/2} dI^\bullet = \\
&= \int_{\{I^\bullet = \mathcal{B}(\omega^*),\ (\omega^*,1) \notin \mathcal{R}^*_\tau\}} \sqrt{1 + |\partial_{I^\bullet} \iota|^2}\, dI^\bullet \leq \\
&\leq \sqrt{1 + \sup|\mathcal{A}|^2} \int_{\{I^\bullet = \mathcal{B}(\omega^*),\ (\omega^*,1) \notin \mathcal{R}^*_\tau\}} dI^\bullet = \\
&= \sqrt{1 + \sup|\mathcal{A}|^2} \int_{(\omega^*,1) \notin \mathcal{R}^*_\tau} |\det \mathcal{B}'|\, d\omega^* \leq \\
&\leq \sqrt{1 + \sup|\mathcal{A}|^2}\, \sup|\det \mathcal{B}'|\, \mathrm{mis}\{\omega^* \in \mathbf{R}^{\ell-2} \ \text{ tc } \ (\omega^*, 1) \notin \mathcal{R}^*_\tau\} \leq \\
&\leq O(\hat{\gamma}(1 + c\rho)/g) = O(\sqrt{\theta_0})
\end{aligned}
$$

provando, grazie anche a (8.66), la prima di (8.5); con ciò, osservando che la (8.61) implica, $\forall |\bar{\alpha}| = 1$, che

$$
\sup|\hat{\partial}^{\bar{\alpha}}\,(\Phi(z) - z)\,| = O(\eta) = O(\theta_0^{3/4}) \tag{8.68}
$$

si ottiene:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{mis}_E \Psi(\Omega^*_\mu \times \mathbf{T}^{\ell-1}) = \\
&= \int_{\Psi(\Omega^*_\mu \times \mathbf{T}^{\ell-1})} dI\, d\varphi = \int_{\Omega^*_\mu \times \mathbf{T}^{\ell-1}} |\det \Psi'|\, dI\, d\varphi \overset{(8.68)}{\geq} \\
&\geq (1 - O(\theta_0^{3/4}))\, \mathrm{mis}\left(\Omega^*_\mu \times \mathbf{T}^{\ell-1}\right) \geq \\
&\geq (1 - O(\theta_0^{3/4}))\,(1 - O(\sqrt{\theta_0}))\, \mathrm{mis}\left(B^{\ell-2}_\rho \times \mathbf{T}^{\ell-1}\right)
\end{aligned}
$$

che prova la terza di (8.5).

La seconda di (8.5) è analoga alla prima, in quanto come sopra, per il Teorema del Dini, esiste ι^* in modo che

$$
h_\infty(I, pq; \mu) = E \iff I = (I^\bullet,\ \iota^*(I^\bullet, pq))
$$

Come nella Proposizione 6.2 si mostra che

$$
\mathcal{A}^*(I^\bullet, p, q) = \left(\frac{\partial_{I^\bullet} h_\infty(I^\bullet, \iota^*(I^\bullet, pq), pq; \mu)}{\partial_{I_{\ell-1}} h_\infty(I^\bullet, \iota^*(I^\bullet, pq), pq; \mu)}, p, q \right)
$$

è un diffeomorfismo; da questo segue che

$$I=\mathcal{I}_\infty^{\bar I}(pq;\mu) \iff h_\infty(I,pq;\mu)=E \ \text{ e } \ \partial_I h_\infty(I,pq;\mu)=\omega_0(\bar I)\ (1+\alpha_\infty(pq;\mu))$$

per cui

$$\begin{array}{l}\Omega^\sharp_\mu=\{(I,p,q)\ \text{ tc }\ |p|\le R_\infty,\ |q|\le R_\infty,\ I=(I^\bullet,\ \iota^*(I^\bullet,pq))\,\text{tc}\\ \partial_I h_\infty\,(I^\bullet,\iota^*(I^\bullet,pq),pq;\mu)=\omega_0(\bar I)\ (1+\alpha_\infty(pq;\mu)),\ \bar I\in\mathcal{D}_\tau\}\end{array}\quad(8.69)$$

Inoltre, se $\mathcal{B}^*$ è il diffeomorfismo inverso di $\mathcal{A}^*$

$$\begin{array}{rl} & \{(I^\bullet,p,q)\ \text{ tc }\ |I^\bullet-\widehat{I}^\bullet|\le\rho,\ |p|\le R_\infty,\ |q|\le R_\infty\ \text{ e}\\ & \partial_I h_\infty\,(I^\bullet,\iota^*(I^\bullet,pq),pq;\mu)\cdot(1+\alpha_\infty(pq;\mu))^{-1}\notin\mathcal{R}_\tau\}\subseteq \qquad (8.70)\\ \subseteq & \{(I^\bullet,p,q)=\mathcal{B}^*(\omega^*,p,q)\ \text{ con }\ |p|\le R_\infty,\ |q|\le R_\infty\ \ (\omega^*,1)\notin\mathcal{R}^*_\tau\}\end{array}$$

da cui, se $\phi^*(I^\bullet,p,q)\equiv(I^\bullet,\iota^*(I^\bullet,pq),p,q)$,

$$\begin{array}{rl} & \text{mis}^E\{(I,p,q)\quad \text{tc}\quad |p|\le R_\infty,\ |q|\le R_\infty\ \ I=(I^\bullet,\ \iota^*(I^\bullet,pq))\,\text{tc}\\ & \partial_I h_\infty\,(I^\bullet\,\iota^*(I^\bullet,pq),pq;\mu)=\omega\ (1+\alpha_\infty(pq;\mu)),\ \omega\notin\mathcal{R}_\tau\}=\\ = & \displaystyle\int_{\{\partial_I h_\infty\cdot(1+\alpha_\infty)^{-1}\notin\mathcal{R}_\tau\}}\left(\sum_{j=1}^{\ell-1}\det{}^2\frac{\partial(\phi^*_1,\dots,\phi^*_{j-1},\phi^*_{j+1},\dots,\phi^*_{\ell-1})}{\partial(I^\bullet,p,q)}\right)^{1/2} dI^\bullet\,dp\,dq\le\\ \le & \displaystyle\int_{\{\mathcal{B}(\omega^*,p,q),\ (\omega^*,1)\notin\mathcal{R}^*_\tau\}}\left(\sum_{j=1}^{\ell-1}\det{}^2\frac{\partial(\phi^*_1,\dots,\phi^*_{j-1},\phi^*_{j+1},\dots,\phi^*_{\ell-1})}{\partial(I^\bullet,p,q)}\right)^{1/2} dI^\bullet\,dp\,dq=\\ = & \displaystyle\int_{\{\mathcal{B}(\omega^*,p,q),\ (\omega^*,1)\notin\mathcal{R}^*_\tau\}}\sqrt{1+|\partial_{I^\bullet}\iota^*|^2+|\partial_p\iota^*|^2+|\partial_q\iota^*|^2}\,dI^\bullet\le\\ \le & \displaystyle\sqrt{1+\frac{\sup|\partial_{I^\bullet}h_\infty|^2+\sup|\partial_p h_\infty|^2+\sup|\partial_q h_\infty|^2}{g}}\cdot\\ & \displaystyle\cdot\int_{\{\mathcal{B}(\omega^*,p,q),\ (\omega^*,1)\notin\mathcal{R}^*_\tau\}} dI^\bullet\,dp\,dq=\\ = & \displaystyle R^2_\infty\sqrt{1+\frac{\sup|\partial_{I^\bullet}h_\infty|^2+\sup|\partial_p h_\infty|^2+\sup|\partial_q h_\infty|^2}{g}}\cdot\\ & \displaystyle\cdot\int_{(\omega^*,1)\notin\mathcal{R}^*_\tau}|\det(\mathcal{B}^*)'|\,d\omega^*\le\\ \le & \displaystyle R^2_\infty\sqrt{1+\frac{\sup|\partial_{I^\bullet}h_\infty|^2+\sup|\partial_p h_\infty|^2+\sup|\partial_q h_\infty|^2}{g}}\cdot\\ & \cdot\sup|\det(\mathcal{B}^*)'|\ \text{mis}\{\omega^*\in\mathbf{R}^{\ell-2}\ \text{ tc }\ (\omega^*,1)\notin\mathcal{R}^*_\tau\}\le\\ \le & R^2_\infty\,O(\hat\gamma/g)=R^2_\infty\,O(\sqrt{\theta_0})\end{array}$$

che prova la seconda delle (8.5). Essa implica l'ultima delle (8.5) in quanto Φ è canonica e quindi preserva le aree. $\square$

Si osservi che le stime (8.5) sono ottimali. Consideriamo infatti

$$\begin{aligned} & H(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2, p, q; \mu) = h(I_1, I_2, pq) + \mu(\cos\varphi_1 - 1) \\ \text{con} \quad & h(I_1, I_2, pq) = \frac{I_1^2}{2} + I_2 + pq \end{aligned} \tag{8.71}$$

Se $(I_1, I_2) \in B_\rho(0)$, con ρ opportunamente piccolo, la matrice

$$\begin{pmatrix} \partial_I^2 h(I, \zeta; \mu) & c\partial_I h(I, \zeta; \mu) \\ c\partial_I h(I, \zeta; \mu) & 0 \end{pmatrix}$$

è invertibile. Il sistema imperturbato ammette i tori invarianti

$$\mathcal{T}_{(I_1, I_2)} \equiv \{(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2),\ (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbf{T}^2\}$$

I tori distrutti dalla perturbazione hanno misura $O(\sqrt{\mu})$: infatti, denotiamo con Σ l'insieme delle (I_1, φ_1) comprese all'interno della separatrice del pendolo $I_1^2/2 + \mu(\cos\varphi_1 - 1)$ e con ι una funzione, la cui esistenza è assicurata dal Dini, tale che

$$h_\infty(I_1, I_2, 0; \mu) = E \iff I_2 = \iota(I_1)$$

La misura dei buchi è almeno

$$\begin{aligned} & \int_{(I_1, \varphi_1) \in \Sigma,\ \varphi_2 \in \mathrm{S}^1} \Big(1 + |\partial_{I_1} \iota|^2\Big)^{1/2} \, dI_1 \, d\varphi_1 \, d\varphi_2 \geq \\ \geq \ & \int_{(I_1, \varphi_1) \in \Sigma,\ \varphi_2 \in \mathrm{S}^1} dI_1 \, d\varphi_1 \, d\varphi_2 = 2\pi \mathrm{mis}\Sigma \geq 16\pi\sqrt{\mu} \end{aligned}$$

Con le notazioni del Teorema 8.1, ciò dice che, in questo caso, $\mathrm{mis}_E \Psi(\Omega_\mu^* \times \mathbf{T}^2) \leq \mathrm{mis}\,(B_\rho \times \mathbf{T}^2) \cdot \Big(1 - O(\sqrt{\mu})\Big)$.

Anche l'insieme dei tori e dei loro baffi distrutti dalla perturbazione ha misura $O(\sqrt{\mu})$: se ι^* è tale che

$$h_\infty(I_1, I_2, pq; \mu) = E \iff I_2 = \iota^*(I_2, pq)$$

la misura dei buchi è, in questo caso, non meno di

$$\begin{aligned} & \int_{\substack{(I_1, \varphi_1) \in \Sigma,\ \varphi_2 \in \mathrm{S}^1 \\ |p|, |q| \leq R_\infty}} \Big(1 + |\partial_{I_1} \iota^*|^2 + |\partial_p \iota^*|^2 + |\partial_q \iota^*|^2\Big)^{1/2} \, dI_1 \, d\varphi_1 \, d\varphi_2 \, dp \, dq \geq \\ \geq \ & \int_{\substack{(I_1, \varphi_1) \in \Sigma,\ \varphi_2 \in \mathrm{S}^1 \\ |p|, |q| \leq R_\infty}} dI_1 \, d\varphi_1 \, d\varphi_2 \, dp \, dq = 2\pi \, R_\infty^2 \mathrm{mis}\Sigma \geq 16\pi \, R_\infty^2 \sqrt{\mu} \end{aligned}$$

Con le notazioni del Teorema 8.1, ciò mostra che $\mathrm{mis}^E \Phi(\Omega_\mu^\sharp \times \mathbf{T}^2) \leq R_\infty^2 \cdot \mathrm{mis}\,(B_\rho \times \mathbf{T}^2) \cdot \Big(1 - O(\sqrt{\mu})\Big)$.

8.2 Proprietà di transizione

Spesso i baffi hanno la struttura di grafici rispetto agli angoli (come capita per la separatrice del pendolo). Per questo è a volte[19] conveniente verificare le proprietà di transizione soltanto per le varietà a energia fissata che sono grafici degli angoli. Il Teorema 8.2 va in questa direzione.

L'intento è quello di studiare le proprietà di transizione nelle variabili "normali", con riferimento[20] al §8 (e al Lemma 1 del §5) di [CG94]. Dimostrerò la transizione per i tori ivi considerati. Farò una stima[21] del tempo di diffusione: tale tempo è controllato superesponenzialmente:

$$T^\star \leq \underbrace{K^{K^{\cdot^{\cdot^{K}}}}}_{n \text{ volte}}$$

dove K è un'opportuna costante, esplicitamente calcolata, e n è il numero di tori che formano la catena.

Più in dettaglio: il Teorema 8.2 mostra la transizione per i tori in coordinate "normali" e il Corollario 8.3 prova che tale transizione si conserva nelle vecchie variabili. Il Corollario 8.4 riguarda la suddetta stima del tempo di diffusione; nella Proposizione 8.5, infine, discuto la proprietà dei baffi di essere grafici rispetto agli angoli.

Teorema 8.2 *Consideriamo l'hamiltoniana*

$$\mathcal{H}(A', \psi, p, q) \qquad\qquad (A', \psi, p, q) \in \mathbf{R}^{\ell-1} \times \mathbf{T}^{\ell-1} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$$

Sia $\mathcal{I} : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^{\ell-1}$ *tale che*

- $\Phi^t_{\mathcal{H}}(\mathcal{I}(pq), \psi, p, q) = \Big(\mathcal{I}(pq), \psi + \omega(pq)\, t, pe^{-\lambda(pq)\, t}, qe^{\lambda(pq)\, t}\Big)$, $\forall |p| \leq R$, $|q| \leq R$; *con* $\inf_{|p|,|q| \leq R} \lambda(pq) > 0$ *e* $\omega(0)$ *diofantino e, per semplicità,* $R \leq 1$.

[19] "Al contrario della stabilità, la non stabilità è a sua volta stabile.
Credo che la tecnica delle catene di transizione sia applicabile anche al caso generale." ([A64])

[20] Nelle mie notazioni $\mathcal{H}$ corrisponde a quella che in [CG94] è chiamata h_∞, e $\mathcal{I}(J)$ a $A'(J)$.

[21] "È meglio risolvere un problema con forte approssimazione e sapere la verità più o meno al 10 per cento, che esigere una soluzione esatta e non sapere la verità per niente."
(Primo Postulato di Thumb – dalla Legge di Murphy)

- $\mathcal{T} \equiv \{(\mathcal{I}(0), \psi, 0, 0),\ \psi \in \mathbf{T}^{\ell-1}\}$ *sia un toro coi baffi: siano*

$$\begin{array}{rcl} W^s & \equiv & \{(\mathcal{I}(0), \psi, p, 0),\ \psi \in \mathbf{T}^{\ell-1},\ |p| \leq R\} \\ W^u & \equiv & \{(\mathcal{I}(0), \psi, 0, q),\ \psi \in \mathbf{T}^{\ell-1},\ |q| \leq R\} \end{array}$$

  i baffi (locali) di $\mathcal{T}$

- $\partial_p \mathcal{H} \neq 0$, $\forall A' = \mathcal{I}(pq)$, $\forall \psi \in \mathbf{T}^{\ell-1}$, $\forall |p| \leq R$, $\forall 0 < |q| \leq R$.

Sia

$$\Omega_R \equiv \{(A', \psi, p, q),\ |A' - \mathcal{I}(0)| \leq R,\ |p| \leq R,\ |q| \leq R,\ \psi \in \mathbf{T}^{\ell-1}\}$$

Sia $\mathcal{N} \subset \Omega_R$ *una varietà trasversa a* W^u *in un punto* η *parametrizzata dagli angoli:*

$$\mathcal{N} = \Big\{(\mathcal{A}(\psi), \psi, \mathcal{P}(\psi), R/2)\,,\ \psi \in \mathbf{T}^{\ell-1},\ |\psi - \psi^u| < c\Big\} \tag{8.72}$$

$$\eta = (\mathcal{I}(0), \psi^u, 0, R/2) = (\mathcal{A}(\psi^u), \psi^u, \mathcal{P}(\psi^u), R/2) \tag{8.73}$$

Allora: $\forall \zeta \in W^s$, $\forall 0 < r < 1$, $\exists z \in B_r(\zeta)$ *e* $\exists t^\star > 0$ *tale che* $\Phi^{t^\star}(z) \in \mathcal{M}$. *Inoltre, il tempo* $t^\star$ *è stimato da una potenza inversa di* r*:*

$$t^\star \leq \frac{C}{r^{b+1}} \tag{8.74}$$

DIM. Poniamo

$$\lambda_{\max} \equiv \sup_{|p|,|q| \leq R} \lambda(pq) \quad \lambda_{\min} \equiv \inf_{|p|,|q| \leq R} \lambda(pq) \quad \Delta \equiv \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$$

e siano $a, b > 1$ tali che $T(\mathcal{T}, \omega(0), \varepsilon/2) \leq \dfrac{a}{\varepsilon^b}$, avendo denotato con $T(\mathcal{T}, \omega, \varepsilon)$ un tempo tale che $\forall x \in \mathcal{T}$ $\exists 0 \leq t \leq T(\mathcal{T}, \omega, \varepsilon)$ che verifichi $|x - \omega t| < \varepsilon$.

Sia inoltre $m \equiv \max\left\{1, \dfrac{\Delta}{\lambda_{\min}} + a\Delta\right\}$.

Per la trasversalità tra W^u e $\mathcal{N}$, grazie al[22] Teorema 7.7 si ha

$$\det \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \psi}(\psi^u) \neq 0 \tag{8.75}$$

[22]Notare dalle ipotesi segue che $\partial_p \mathcal{H}(\eta) \neq 0$; e ovviamente W^u interseca trasversalmente $S_{R/2} \equiv \{(A', \psi, p, R/2)\}$.

per cui posso porre $T \equiv \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \psi}(\psi^u)\right)^{-1}$.

Sia adesso τ_1 tale che

$$|\pi_p\left(\Phi^{\tau_1}(\zeta)\right)| \leq \min\left\{R,\ \frac{1}{4m\left(\sup_{|p|,|q|\leq R}|\partial\mathcal{I}(pq)| + \sup_{|p|,|q|\leq R}|\partial\omega(pq)|\right)}\right\}$$

E scriviamo $\zeta' \equiv \Phi^{\tau_1}(\zeta) = (\mathcal{I}(0), \psi^s, p^s, 0)$.

Certo $\Phi^{\tau_1}(B_r(\zeta))$ contiene una palla di centro ζ': $\exists 0 < r' \leq 1/2$ tale che $\Phi^{\tau_1}(B_r(\zeta)) \supseteq B_{r'}(\zeta')$. Non è restrittivo supporre che

$$\begin{aligned} r' \ \leq\ & \min\{R,\ (8\,|T|\,R^2 \sup_{|p|,|q|\leq R}|\partial\mathcal{I}(pq)|)^{-1}, \\ & c,\ (2\,|T|\,(\ell-1) \sup_{|\psi-\psi^u|<c,\, 1\leq i,j,k\leq \ell-1}|\partial^2_{\psi_i\,\psi_j}\mathcal{A}_k|)^{-1}\} \end{aligned} \tag{8.76}$$

Sia ora $\mathcal{F}(\xi,\psi) \equiv \mathcal{A}(\psi) - \mathcal{I}(\xi)$. Dalla definizione di η segue che $\mathcal{F}(0,\psi^u) = 0$. E dalla (8.75) discende che

$$\det\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \psi}(0,\psi^u) = \det\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \psi}(\psi^u) \neq 0$$

Siano ora α, β tali che

$$\begin{aligned} &\alpha > 0, && 0 < \beta \leq \min\{\frac{c}{2}, \frac{r'}{4}\} \\ &\sup_{|\xi|\leq\alpha,\,|\psi-\psi^u|\leq\beta}|I - T\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\psi}(\xi,\psi)| \leq \frac{1}{2}, && \sup_{|\xi|\leq\alpha}|\mathcal{F}(\xi,\psi^u)| \leq \frac{\beta}{2|T|} \end{aligned} \tag{8.77}$$

Per[23] il Teorema del Dini (nella sua versione quantitativa: cfr. [C], pag. 132)

---

[23] È importante osservare (cfr. la nota di pagina 126) che si può scegliere

$$\alpha \equiv (Rr')^2 \qquad \beta \equiv \frac{r'}{4}$$

Infatti con tali scelte si ha (ricordando (8.76)):

$$\begin{aligned} |I - T\,\partial_\psi\mathcal{F}| \ &\leq\ |T|\,|\partial\mathcal{A}(\psi^u) - \partial\mathcal{A}(\psi)| \leq (\ell-1)\,|T|\,|\partial^2\mathcal{A}|\,\beta \leq \frac{1}{2} \\ |\mathcal{F}(\xi,\psi^u)| \ &=\ |\mathcal{A}(\psi^u) - \mathcal{I}(\xi)| = |\mathcal{I}(0) - \mathcal{I}(\xi)| \leq |\partial\mathcal{I}|\,|\alpha| \leq \frac{\beta}{2\,|T|} \end{aligned}$$

si ottiene cosí che $\forall|\xi| \leq \alpha\ \exists\psi(\xi)$ tale che

$$\mathcal{A}\left(\psi(\xi)\right) = \mathcal{I}(\xi) \qquad |\psi(\xi) - \psi^u| \leq \beta \tag{8.78}$$

Poniamo ora

$$t(q) \equiv \frac{1}{\lambda(p^s q)} \log \frac{R}{2q} \qquad\qquad \forall q_{\min} \leq q \leq q_{\max}$$

con

$$q_{\max} \equiv R\,(r')^{b+1} \qquad q_{\min} \equiv \frac{(q_{\max})^{\Delta}}{\left(\frac{R}{2}\right)^{\Delta-1} e^{\lambda_{\max} T(\mathcal{T},\omega(0),r'/2)}}$$

(il fatto che $r' \leq 1/2$ garantisce che $q_{\min} \leq q_{\max}$).

Si ha, per costruzione

$$t(q_{\min}) - t(q_{\max}) \geq \frac{1}{\lambda_{\max}} \log \frac{R}{2q_{\min}} - \frac{1}{\lambda_{\min}} \log \frac{R}{2q_{\max}} = T(\mathcal{T}, \omega(0), r'/2)$$

per cui $\exists q^\star$, $0 < q_{\min} \leq q^\star \leq q_{\max} \leq (r')^{b+1} \leq r'$ tale che

$$|\psi^u - \omega(0)\, t(q^\star) - \psi^s| \leq \frac{r'}{2}$$

Inoltre:

$$\begin{aligned} t(q^\star) \quad &\leq \quad \frac{1}{\lambda_{\min}} \log \frac{R}{2q_{\min}} = \frac{1}{\lambda_{\min}} \left(\Delta \log \frac{R}{2q_{\max}} + \lambda_{\max} T(\mathcal{T}, \omega(0), r'/2) \right) \leq \\ &\leq \quad \frac{\Delta}{\lambda_{\min}} \log \frac{1}{2(r')^{b+1}} + \Delta\, \frac{a}{(r')^b} \end{aligned} \tag{8.79}$$

Sia quindi[24] (ricordando (8.78)) $\tilde{\psi} \equiv \psi(p^s q^\star)$; $\psi^\star \equiv \tilde{\psi} - \omega(p^s q^\star) t(q^\star)$. Si ha $|\tilde{\psi} - \psi^u| \leq \beta < c$, cioè $\tilde{\psi}$ è nel dominio del grafico.

Otteniamo per costruzione

$$\mathcal{I}(p^s q^\star) = \mathcal{A}(\tilde{\psi}) \qquad \psi^\star + \omega(p^s q^\star) t(q^\star) = \tilde{\psi} \qquad \frac{R}{2} = q^\star e^{\lambda(p^s q^\star)\, t(q^\star)}$$

da cui, poichè siamo su un livello di energia (con $\partial_p \mathcal{H} \neq 0$), deve essere $\mathcal{P}(\tilde{\psi}) = p^s e^{-\lambda(p^s q^\star)\, t(q^\star)}$: ovvero, posto $z' \equiv (\mathcal{I}(p^s q^\star), \psi^\star, p^s, q^\star)$ si ha

$$\begin{aligned} \Phi^{t(q^\star)}(z') \quad &= \quad \left(\mathcal{I}(p^s q^\star), \psi^\star + \omega(p^s q^\star)\, t(q^\star), p^s e^{-\lambda(p^s q^\star)\, t(q^\star)}, q^\star e^{\lambda(p^s q^\star)\, t(q^\star)} \right) = \\ &= \quad \left(\mathcal{A}(\tilde{\psi}), \tilde{\psi}, \mathcal{P}(\tilde{\psi}), R/2 \right) \in \mathcal{M} \end{aligned}$$

[24]La definizione di $\tilde{\psi}$ è ben posta, in quanto $|p^s q^\star| \leq R q_{\max} = R^2 (r')^{b+1} \leq \alpha$, in virtù della nota di pagina 125.

Si osservi che $z' \in B_{r'}(\zeta')$: infatti so già che $|q^\star| \le (r')^{b+1} \le r'$; poi $|\mathcal{I}(p^s q^\star) - \mathcal{I}(0)| \le |\partial\mathcal{I}|\,|p^s|\,|q^\star| \le r'$ per la definizione di τ_1; infine:

$$
\begin{aligned}
|\psi^\star - \psi^s| &= |\tilde\psi - \omega(p^s q^\star)\,t(q^\star) - \psi^s| \le |\tilde\psi - \psi^u| + \\
&\quad + |\psi^u - \omega(0)\,t(q^\star) - \psi^s| + |\omega(0) - \omega(p^s q^\star)|\,t(q^\star) \overset{(8.79)}{\le} \\
&\le \beta + \frac{r'}{2} + |\partial\omega|\,|p^s|\,|q^\star| \left(\frac{\Delta}{\lambda_{\min}} \log\frac{1}{2(r')^{b+1}} + \Delta\,\frac{a}{(r')^b}\right) \le \\
&\le \frac{r'}{4} + \frac{r'}{2} + |\partial\omega|\,|p^s|\,(r')^{b+1} \left(\frac{\Delta}{\lambda_{\min}}\sqrt{\frac{1}{2(r')^{b+1}}} + \Delta\,\frac{a}{r'^b}\right) \le \\
&\le \frac{r'}{4} + \frac{r'}{2} + |\partial\omega|\,|p^s| \left(\frac{\Delta(r')^{(b+1)/2}}{\lambda_{\min}} + a\Delta\, r'\right) \le \\
&\le \frac{r'}{4} + \frac{r'}{2} + |\partial\omega|\,|p^s|\,m r' \le \frac{r'}{4} + \frac{r'}{2} + \frac{r'}{4} \le r'
\end{aligned}
$$

avendo usato ancora la definizione di τ_1.

Perciò , posto $t^\star \equiv \tau_1 + t(q^\star)$ e $z \equiv \Phi^{-\tau_1}(z')$, si ha che per costruzione $z \in B_r(\zeta)$ e che $\Phi^{t^\star}(z) \in \mathcal{M}$.

Verso la (8.74): sia

$$
\begin{aligned}
\tilde M \;&\equiv\; \min\{R,\, (8\,|T|\,R^2 \sup_{|p|,|q|\le R} |\partial\mathcal{I}(pq)|)^{-1},\, c, \\
&\qquad (2\,|T|\,(\ell-1) \sup_{|\psi-\psi^u|<c,\, 1\le i,j,k\le \ell-1} |\partial^2_{\psi_i\,\psi_j}\mathcal{A}_k|)^{-1}\}
\end{aligned}
$$

Poichè dal Teorema di dipendenza dai dati iniziali segue che

$$
\Phi^t\left(B_\kappa(x)\right) \supseteq B_{\tilde\kappa}\left(\Phi^t(x)\right) \qquad\qquad \forall \tilde\kappa \le \kappa\, e^{-Gt}
$$

posso scegliere $r' \equiv \tilde M r\, e^{-G\tau_1}$: con questa posizione è $\Phi^{\tau_1}(B_r(\zeta)) \supseteq B_{r'}(\zeta')$ e vale (8.76).

Ponendo $c_1 \equiv \max\left\{\dfrac{\Delta}{\lambda_{\min}},\, \Delta a\right\}$ e $c_2 \ge 2c_1\,(\tilde M^{-1} e^{G\tau_1})^{b+1}$, dalla (8.79) otteniamo cosí:

$$
t(q^\star) \le c_1 \log\frac{1}{(r')^{b+1}} + \frac{c_1}{(r')^{b+1}} \le \frac{2c_1}{(r')^{b+1}} \le \frac{c_2}{r^{b+1}}
$$

da cui, se $c_3 \ge \tau_1$, si pone $C \equiv 2\max\{c_2,\, c_3\}$ e si giunge a $t^\star \le \dfrac{c_2}{r^{b+1}} + c_3 \le \dfrac{c_2}{r^{b+1}} + \dfrac{c_3}{r^{b+1}} \le \dfrac{C}{r^{b+1}}$. □

Corollario 8.3 *Consideriamo l'hamiltoniana*

$$H(A,\alpha,I,\varphi) \qquad\qquad (A,\alpha,I,\varphi)\in \mathbf{R}^{\ell-1}\times\mathbf{T}^{\ell-1}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}$$

Supponiamo che esista una trasformazione canonica

$$\Phi:(A',\psi,p,q)\longrightarrow(A,\alpha,I,\varphi)$$

e una funzione $A':\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}^{\ell-1}$ *in modo che*

- $\Phi^t_H\left(\Phi\left(A'(pq),\psi,p,q\right)\right)=\Phi\left(A'(pq),\psi+\omega(pq)\,t,pe^{-\lambda(pq)\,t},qe^{\lambda(pq)\,t}\right)$, $\forall|p|,|q|\le R\le 1$; *con* $\omega(0)$ *diofantino*
- $\mathcal{T}\equiv\{\Phi(A'(0),\psi,0,0),\,\psi\in\mathbf{T}^{\ell-1}\}$ *sia un toro coi baffi:*

$$\begin{aligned}W^s &\equiv \{\Phi(A'(0),\psi,p,0),\,\psi\in\mathbf{T}^{\ell-1},\,|p|\le R\}\\ W^u &\equiv \{\Phi(A'(0),\psi,0,q),\,\psi\in\mathbf{T}^{\ell-1},\,|q|\le R\}\end{aligned}$$

- *Posto* $\mathcal{H}\equiv H\circ\Phi$ *si abbia* $\partial_p\mathcal{H}\neq 0$ $\forall A'=A'(pq)$, $\forall\psi\in\mathbf{T}^{\ell-1}$, $\forall|p|\le R$, $\forall 0<|q|\le R$.

Sia $\hat{\mathcal{K}}=\Phi(\mathcal{K})$ *un insieme compatto. Sia* $\mathcal{M}$ *una varietà parametrizzata dagli angoli* ψ*:*

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &\equiv \left\{(\mathcal{A}(\psi),\psi,\mathcal{P}(\psi),R/2)\,,\,\psi\in\mathbf{T}^{\ell-1},\,|\psi-\psi^u|<c\right\}\\ \eta &= (\mathcal{I}(0),\psi^u,0,R/2)\end{aligned}\tag{8.80}$$

tale che $\hat{\mathcal{M}}\equiv\Phi(\mathcal{M})$ *sia trasversa a* W^u *in un punto* $\hat\eta\equiv\Phi(\eta)\in\hat{\mathcal{K}}$ *Allora:* $\forall\hat\zeta\equiv\Phi(\zeta)\in W^s\cap\hat{\mathcal{K}}$, $\forall 0<r<1$, $\exists\hat z\in B_r(\hat\zeta)$ *e* $\exists T^\star>0$ *tale che* $\Phi^{t^\star}_H(\hat z)\in\hat{\mathcal{M}}$.

Inoltre, $t^\star$ *è controllato da una potenza inversa di* r*:* $t^\star\le\dfrac{\hat C}{r^{b+1}}$

DIM. Se poniamo $k\equiv\max\{\sup_{\mathcal{K}}|\Phi'|,\,\sup_{\mathcal{K}}|((\Phi)^{-1})'|\}$ è facile verificare che

$$B_{\kappa_1}\left(\Phi(x)\right)\subseteq\Phi\left(B_\kappa(x)\right)\subseteq B_{\kappa_1}\left(\Phi(x)\right)\qquad\qquad \forall\kappa_1\le\kappa\,k^{-1},\ \kappa_2\ge\kappa k$$

Sia quindi $r^\sharp\equiv r\,k^{-1}$. Per il precedente Teorema $\exists z\in B_{r^\sharp}(\zeta)$, $\exists t^\star$ tale che $\Phi^{t^\star}_{\mathcal{H}}(z)\in\mathcal{M}$. Allora posto $\hat z\equiv\Phi(z)\in\Phi\left(B_{r^\sharp}(\zeta)\right)\subseteq B_r(\hat\zeta)$ si ottiene

$$\Phi^{t^\star}_H(\hat z)=\Phi^{t^\star}_H\circ\Phi(z)=\Phi\circ\Phi^{t^\star}_{\mathcal{H}}(z)\in\Phi(\mathcal{M})=\hat{\mathcal{M}}$$

Inoltre, per la (8.74)

$$t^\star \leq \frac{C}{(r^\sharp)^{b+1}} = \frac{\hat{C}}{r^{b+1}}$$

avendo posto $\hat{C} \equiv C k^{b+1}$. □

Corollario 8.4 (Tempo di diffusione superesponenziale) *Consideriamo una catena di tori coi baffi $\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_n$ per l'hamiltoniana*

$$H(A, \alpha, I, \varphi) \qquad\qquad (A, \alpha, I, \varphi) \in \mathbf{R}^{\ell-1} \times \mathbf{T}^{\ell-1} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$$

Assumiamo che i loro baffi si intersechino trasversalmente in $\eta_i \in W_i^u \cap W_{i+1}^s$, $1 \leq i \leq n-1$ e che i baffi siano grafici rispetto agli angoli nelle vicinanze di η_i.

Supponiamo che ogni toro sia nelle ipotesi del Corollario precedente: cioè che esista una trasformazione canonica

$$\Phi : (A', \psi, p, q) \longrightarrow (A, \alpha, I, \varphi)$$

e n funzioni $A_i' : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^{\ell-1}$ $1 \leq i \leq n$ in modo che

- $\Phi_H^t \left(\Phi\left(A_i'(pq), \psi, p, q\right)\right) = \Phi\left(A_i'(pq), \psi + \omega_i(pq)\, t, p e^{-\lambda_i(pq)\, t}, q e^{\lambda_i(pq)\, t}\right)$, $\forall |p|, |q| \leq R \leq 1$*; con $\omega_i(0)$ diofantino.*
- $\mathcal{T}_i = \{\Phi(A_i'(0), \psi, 0, 0),\ \psi \in \mathbf{T}^{\ell-1}\}$*; i baffi di $\mathcal{T}_i$ siano*

$$\begin{aligned} W_i^s &\equiv \bigcup_{t \leq 0} \Phi_H^t \circ \{\Phi(A_i'(0), \psi, p, 0),\ \psi \in \mathbf{T}^{\ell-1},\ |p| \leq R\} \\ W_i^u &\equiv \bigcup_{t \geq 0} \Phi_H^t \circ \{\Phi(A_i'(0), \psi, 0, q),\ \psi \in \mathbf{T}^{\ell-1},\ |q| \leq R\} \end{aligned}$$

- *il baffo stabile dell' i-esimo toro si scrive*[25] *come grafico trasverso negli angoli, nei pressi dell' $(i-1)$-esimo toro:*

$$\begin{aligned} & W_i^s \cap \{|\psi - \psi_i^u| \leq c'\} = \\ = \ & \left\{\Phi\left(\mathcal{A}_i(\psi), \psi, \mathcal{P}_i(\psi), R/2\right),\ \psi \in \mathbf{T}^{\ell-1},\ |\psi - \psi_i^u| < c\right\} \end{aligned} \quad (8.81)$$

[25] A proposito di questa ipotesi cfr. la successiva Proposizione 8.5.

- *Posto $\mathcal{H} \equiv H \circ \Phi$ si abbia $\partial_p \mathcal{H} \neq 0$, $\forall A' = A'_i(pq)$, $\forall \psi \in \mathbf{T}^{\ell-1}$, $\forall |p| \leq R$, $\forall 0 < |q| \leq R$.*

Allora per tali tori si ha transizione, nel senso che partendo nei pressi della varietà stabile di $\mathcal{T}_1$ si può giungere sulla varietà stabile di $\mathcal{T}_n$ in un tempo $T^\star$.

Esiste $K > 1$ che controlla tale tempo di diffusione in maniera superesponenziale:

$$T^\star \leq \underbrace{K^{K^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{K}}}}}}_{n \text{ volte}}$$

DIM. Fissato $\zeta_1 \in W_1^s$ e ponendo $r_1 \equiv r$, dal precedente Corollario ho che $\exists t_1^\star > 0$, $\exists z_1 \in B_{r_1/2}(\zeta_1)$ in modo che

$$\zeta_2 \equiv \Phi_H^{t_1^\star}(z_1) \in W_2^s \quad \text{e} \quad t_1^\star \leq \frac{C}{(r_1/2)^{b+1}}$$

Sia G tale che $|\Phi_H^t(x) - \Phi_H^t(y)| \leq e^{G|t|}|x-y|$; poniamo

$$r_2 \equiv \frac{r_1}{2e^{Gt_1^\star}}$$

Si vede che[26] $B_{r_2}(\zeta_2) \subseteq \Phi^{t_1^\star}(B_{r_1}(\zeta_1))$.

Procedendo ricorsivamente in questo modo, si ottiene che $\exists z_i \in B_{r_i/2}$, $\exists t_i^\star > 0$ in modo che

$$\zeta_{i+1} \equiv \Phi_H^{t_i^\star}(z_i) \in W_{i+1}^s \quad \text{e} \quad t_i^\star \leq \frac{C}{(r_i/2)^{b+1}}$$

e ponendo

$$r_{i+1} \equiv \frac{r_i}{2e^{Gt_i^\star}} \tag{8.82}$$

si abbia $B_{r_{i+1}}(\zeta_{i+1}) \subseteq \Phi_H^{t_i^\star}(B_{r_i}(\zeta_i))$, con $1 \leq i \leq n-1$. Otteniamo:

$$W_n^s \ni \zeta_n = \Phi_H^{t_{n-1}^\star}(z_{n-1}) = \Phi_H^{t_{n-1}^\star + t_{n-2}^\star}(z_{n-2}) = \ldots = \Phi_H^{t_{n-1}^\star + \ldots + t_1^\star}(z_1)$$

[26]Infatti: $y \in B_{r_2}(\zeta_2) \implies$ posto $x \equiv \Phi_H^{-t_1^\star}(y)$, si abbia $|x - \zeta_1| \leq |x - z_1| + |z_1 - \zeta_1| \leq |\Phi_h^{-t_1^\star}(y) - \Phi_h^{-t_1^\star}(\zeta_2)| + \frac{r_1}{2} \leq e^{Gt_1^\star}|y - \zeta_2| + \frac{r_1}{2} \leq e^{Gt_1^\star} r_2 + \frac{r_1}{2} = r_1 \implies x \in B_{r_1}(\zeta_1)$ e $y = \Phi_H^{t_1^\star}(x) \in \Phi_H^{t_1^\star}(B_{r_1}(\zeta_1))$.

Dalla (8.82) segue, ricorsivamente, che

$$r_i = \frac{r}{2^i \exp\left(G \sum_{j=1}^{i-1} t_j^\star\right)} \qquad \forall 1 \le i \le n$$

Ponendo per semplicità $A \equiv 2^{b+1}C$, $B \equiv b+1$, $K \equiv \max\{2,\ A{r_1}^{-B}, e^{2^B+BG}\}$ e $\tau_i^\star \equiv \frac{A\,2^{Bi}}{r_1^B}\exp(BG\sum_{j=1}^{i-1} t_j^\star)$, si ha

$$t_i^\star \le \frac{A\,2^{Bi}}{r_i^B} = \frac{A}{r_1^B}\exp(BG\sum_{j=1}^{i-1} t_j^\star) = \tau_i^\star$$

Affermo che

$$\tau_i^\star \le \underbrace{K^{K^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{K}}}}}}_{i \text{ volte}}$$

Infatti: $\tau_1^\star = A{r_1}^{-B} \le K$, e poi per induzione

$$\begin{aligned}
\tau_i^\star &= \frac{A\,2^{Bi}}{r_1^B}\exp(BG\sum_{j=1}^{i-1} t_j^\star) = \frac{A\,2^{Bi}}{r_1^B}\exp(BG\sum_{j=1}^{i-2} t_j^\star)\ \exp(BGt_{i-1}^\star) \le \\
&\le 2^B\tau_{i-1}^\star e^{BG\tau_{i-1}^\star} \le e^{2^B\tau_{i-1}^\star + BG\tau_{i-1}^\star} \le K^{\tau_{i-1}^\star} \le \underbrace{K^{K^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{K}}}}}}_{i \text{ volte}}
\end{aligned}$$

Da ciò: $t_i^\star \le \tau_i^\star \le \underbrace{K^{K^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{K}}}}}}_{i \text{ volte}}$. È facile vedere che, $\forall j \in \mathbf{N}$, $j \ge 2$, $\forall \kappa \ge 2$

$$(j+1)\kappa \le \kappa^j \tag{8.83}$$

Si ha poi, $\forall j \ge 1$

$$j \cdot \underbrace{K^{K^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{K}}}}}}_{j \text{ volte}} \le \underbrace{K^{K^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{K}}}}}}_{j+1 \text{ volte}} \tag{8.84}$$

per induzione, infatti:

$$(j+1) \cdot \underbrace{K^{K^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{K}}}}}}_{j+1 \text{ volte}} = (j+1) \cdot K^{\left(\frac{1}{j}\cdot j\cdot \underbrace{K^{K^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{K}}}}}}_{j \text{ volte}}\right)} \le$$

$$
\begin{aligned}
&\le \quad (j+1)\cdot K^{\left(\frac{1}{j}\cdot\underbrace{K^{K^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{K}}}}}}_{j+1\text{ volte}}\right)} \overset{(8.83)}{\le} \\
&\le \quad K^{\left(\frac{1}{j}\underbrace{K^{K^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{K}}}}}}_{j+1\text{ volte}}\right)\cdot j} = \underbrace{K^{K^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{K}}}}}}_{j+2\text{ volte}}
\end{aligned}
$$

Otteniamo cosí:

$$
T^{\star} = \sum_{j=1}^{n-1} t_j^{\star} \le \sum_{j=1}^{n-1} \underbrace{K^{K^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{K}}}}}}_{j\text{ volte}} \le (n-1)\cdot \underbrace{K^{K^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{K}}}}}}_{n-1\text{ volte}} \overset{(8.84)}{\le} \underbrace{K^{K^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{K}}}}}}_{n\text{ volte}} \qquad \square
$$

La richiesta (8.81) nel precedente enunciato è giustificata dalla seguente[27]:

Proposizione 8.5 *Assumiamo che W^s sia un grafico rispetto agli angoli $\alpha \in \mathbf{T}^{\ell-1}$ e φ nelle vicinanze di un dato φ^u:*

$$
W^s_{\rm loc} = \left\{ \left(\bar{A}(\alpha,\varphi), \alpha, \bar{I}(\alpha,\varphi), \varphi\right), \alpha \in \mathbf{T}^{\ell-1},\ \varphi \in \mathbf{R},\ |\varphi - \varphi^u| \le c' \right\} \qquad (8.85)
$$

e supponiamo che ci sia una trasformazione canonica[28]

$$
\Phi : (A', \psi, p, q) \longrightarrow (A, \alpha, I, \varphi)
$$

$$
\begin{aligned}
\Phi(A',\psi,p,q;\mu) &= (A' + O(\mu),\ \psi + O(\mu),\ I_0(p,q) + O(\mu),\ \varphi_0(p,q) + O(\mu)) \\
\Phi^{-1}(A,\alpha,I,\varphi;\mu) &= (A + O(\mu),\ \alpha + O(\mu),\ p_0(I,\varphi) + O(\mu), q_0(I,\varphi) + O(\mu))
\end{aligned}
$$

con $|p|, |q| \le R$ e μ opportunamente piccolo. Supponiamo

$$
\det\left(\frac{\partial q_0}{\partial I}\frac{\partial \bar{I}}{\partial \varphi} + \frac{\partial q_0}{\partial \varphi} \right) \ne 0 \qquad \forall |\varphi - \varphi^u| \le c'
$$

Allora W^s è un grafico rispetto a (ψ, q):

$$
\begin{aligned}
& W^s \cap \{|\varphi - \varphi^u| \le c'\} = \qquad (8.86) \\
= \quad & \{\Phi(\tilde{\mathcal{A}}(\psi,q), \psi, \tilde{\mathcal{P}}(\psi,q), q),\ \psi \in \mathbf{T}^{\ell-1},\ |q - R/2| < c\}
\end{aligned}
$$

[27] Le ipotesi della Proposizione 8.5 sono verificate in particolare nel caso del pendolo: vd. [CG94].

[28] La trasformazione $(p,q) \mapsto (I_0, \varphi_0)$ è data nel Lemma 0 del §5 di [CG94]. Cfr. anche il Teorema 5.1 di questa tesi.

In particolare, per giungere a un'espressione "ortogonale" come quella in (8.81) *(cioè con q fissa) basta porre* $\mathcal{A}(\psi) \equiv \tilde{\mathcal{A}}(\psi, R/2)$*,* $\mathcal{P}(\psi) \equiv \tilde{\mathcal{P}}(\psi, R/2)$*:*

$$\begin{aligned} & W_i^s \cap \{|\varphi - \varphi^u| \le c'\} \supseteq \\ \supseteq \quad & \{\Phi(\mathcal{A}(\psi), \psi, \mathcal{P}(\psi), R/2),\ \psi \in \mathbf{T}^{\ell-1},\ |\psi - \psi_i^u| < c\} \end{aligned}$$

DIM. Denotiamo

$$\Phi^{-1}(A, \alpha, I, \varphi) = (A + \Delta_1,\ \alpha + \Delta_2,\ p_0(I, \varphi) + \Delta_3,\ q_0(I, \varphi) + \Delta_4)$$

dove $\Delta_i = \Delta_i(A, \alpha, I, \varphi) = O(\mu)$. Ponendo

$$\delta_i(\alpha, \varphi) \equiv \Delta_i(\bar{A}(\alpha, \varphi), \alpha, \bar{I}(\alpha, \varphi), \varphi) = O(\mu)$$

si ha

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(\bar{A}(\alpha, \varphi), \alpha, \bar{I}(\alpha, \varphi), \varphi) = (&\bar{A}(\alpha, \varphi) + \delta_1(\alpha, \varphi),\ \alpha + \delta_2(\alpha, \varphi), \\ &p_0(\bar{I}(\alpha, \varphi), \varphi) + \delta_3(\alpha, \varphi),\ q_0(\bar{I}(\alpha, \varphi), \varphi) + \delta_4(\alpha, \varphi)) \end{aligned}$$

Mostro che

$$(\alpha, \varphi) \mapsto (\psi, q) = \mathcal{F}(\alpha, \varphi) \equiv (\alpha + \delta_2(\alpha, \varphi),\ q_0(\bar{I}(\alpha, \varphi), \varphi) + \delta_4(\alpha, \varphi))$$

è invertibile. Infatti:

$$\begin{aligned} \det \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial(\alpha, \varphi)} &= \det \begin{pmatrix} I + O(\mu) & O(\mu) \\ * & \dfrac{\partial q_0}{\partial I}\dfrac{\partial \bar{I}}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial q_0}{\partial \varphi} + O(\mu) \end{pmatrix} = \\ = \quad \det &\begin{pmatrix} I & 0 \\ * & \dfrac{\partial q_0}{\partial I}\dfrac{\partial \bar{I}}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial q_0}{\partial \varphi} \end{pmatrix} + O(\mu) = \det \left(\frac{\partial q_0}{\partial I}\frac{\partial \bar{I}}{\partial \varphi} + \frac{\partial q_0}{\partial \varphi} \right) \neq 0 \end{aligned}$$

Perciò otteniamo

$$\begin{aligned} &\Phi^{-1}(\bar{A}(\alpha, \varphi), \alpha, \bar{I}(\alpha, \varphi), \varphi) = (\bar{A} \circ \mathcal{F}^{-1}(\psi, q) + \delta_1 \circ \mathcal{F}^{-1}(\psi, q), \\ &\alpha(\psi, q) + \delta_2 \circ \mathcal{F}^{-1}(\psi, q),\ p_0(\bar{I} \circ \mathcal{F}^{-1}(\psi, q), \varphi(\psi, q)) + \delta_3 \circ \mathcal{F}^{-1}(\psi, q), \\ &q_0(\bar{I} \circ \mathcal{F}^{-1}(\psi, q), \varphi) + \delta_4 \circ \mathcal{F}^{-1}(\psi, q)) \equiv (\tilde{\mathcal{A}}(\psi, q), \psi, \tilde{\mathcal{P}}(\psi, q), q) \end{aligned}$$

Da ciò e da (8.85) segue (8.86).

Si osservi che l'inversione è globale su $\mathbf{T}^{\ell-1}$: cioè $\forall\psi \in \mathbf{T}^{\ell-1}$ $\exists!(\alpha,\varphi) \in \mathbf{T}^{\ell-1} \times \{|\varphi - \varphi^u| \leq c'\}$ tale che $\alpha + \delta_2(\alpha,\varphi) = \psi$: ciò può essere provato osservando che $\mathcal{C}(\alpha,\varphi) \equiv (\psi - \delta_2(\alpha,\varphi),\varphi)$ è una contrazione su $\mathbf{T}^{\ell-1} \times \{|\varphi - \varphi^u| \leq c'\}$. □

A voler essere precisi, il Teorema 8.2 (e i suoi Corollari) mostrano che i tori considerati in [CG94] sono di transizione in un senso più debole rispetto alla Definizione 7.3: non si prova infatti che $\forall\xi^u \in W^u$, $\forall\xi^s \in W^s$, $\forall r > 0$ e $\forall\mathcal{N}$ trasversa a W^u in ξ^u, $\exists t$ $\exists\zeta \in B_r(\xi^s)$ tale che $\Phi^t(\zeta) \in \mathcal{N}$, come la Definizione 7.3 esigerebbe. Il Teorema 8.2, invece, sembra dimostrare tale asserto "solo" per varietà parametrizzate dagli angoli, del tipo descritto dalla (8.72).

In realtà, ciò è sufficiente per dimostrare che i tori di [CG94] rispettano la Definizione 7.3 di transizione, in quanto tutte le varietà trasverse si scrivono (a meno di spostarle[29] un po' con il flusso hamiltoniano) come nella (8.72):

Lemma 8.6 *Sia* $\mathcal{H}_\mu(A',\psi,p,q) = h(A',pq;\mu) + \mu f(A',\psi,p,q;\mu)$, $(A',\psi,p,q) \in \mathbf{R}^{\ell-1} \times \mathbf{T}^{\ell-1} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, *con* $\mu \in \mathbf{R}$ *fissato.*

Sia $\mathcal{N} = \{(A'(u,v),\psi(u,v),p(u,v),q(u,v)),\ (u,v) \in \mathbf{R}^{\ell+\ell'},\ |(u,v)| \leq R_0\}$ *(con* $\ell' \geq 0$*) trasversa a* $W^u = \{(A'_0,\psi,0,q),\ \psi \in \mathbf{T}^{\ell-1},\ q \in \mathbf{R},\ |q| \leq R\}$ *in*

$$\eta_0 = (A'_0,\psi_0,0,q_0) = (A'(0),\psi(0),p(0),q(0))$$

[29]Con le notazioni del Teorema 8.2, $\mathcal{N} \equiv \{(A',\psi^u,p,R/2),\ A' \in \mathbf{R}^{\ell-1},\ p \in \mathbf{R}\}$ è un esempio di varietà trasversa a W^u in η_0 che non si può scrivere come nella (8.72). Il Lemma 8.6 mostra, però, che il suo flusso di fase ad un tempo opportuno assume l'aspetto della (8.72).

con $q_0 \neq 0$. *Assumiamo*[30]

$$\det \partial^2_{(A',p)} \mathcal{H}_\mu(\eta_0) \neq 0 \tag{8.87}$$

Allora, $\forall t^* < 0$, $\exists \hat{t} \in (t^*, 0)$ *e opportune funzioni* $\tilde{\mathcal{A}}$ *e* $\tilde{\mathcal{P}}$ *tali che*

$$\Phi^{\hat{t}}_{\mathcal{H}_\mu}(\mathcal{N}) \supseteq \{(\tilde{\mathcal{A}}(\psi, q; \mu), \psi, \tilde{\mathcal{P}}(\psi, q; \mu), q),\ |\psi - \psi_0| < c_1,\ |q - q_0| < c_2\} \tag{8.88}$$

In particolare, ponendo $\mathcal{A}(\psi; \mu) \equiv \tilde{\mathcal{A}}(\psi, q_0; \mu)$ *e* $\mathcal{P}(\psi; \mu) \equiv \tilde{\mathcal{P}}(\psi, q_0; \mu)$,

$$\Phi^{\hat{t}}_{\mathcal{H}_\mu}(\mathcal{N}) \supseteq \{(\mathcal{A}(\psi; \mu), \psi, \mathcal{P}(\psi; \mu), q_0),\ |\psi - \psi_0| < c_1\}$$

DIM. Essendo $\mathcal{N}$ trasversa, posso supporre[31] che $\det \left.\frac{\partial(A', p)}{\partial u}\right|_{u=0, v=0} \neq 0$, per cui $\mathcal{N}$ è (nelle vicinanze di η_0) un grafico in (A, p): se $u = u(A', p)$,

[30]Si osservi che, per hamiltoniane del tipo

$$\mathcal{H}_\mu(A', \psi, p, q) = h(A', pq; \mu) + \mu f(A', \psi, p, q; \mu)$$

con

$$h(A', pq; \mu) = h^\star(A'; \mu) + \lambda(A'; \mu)\, pq + \frac{1}{2}\Lambda(A'; \mu)\, p^2 q^2 + O_3(pq)$$

la condizione (8.87) si traduce, per μ piccoli, in una condizione di non singolarità su h, del tipo

$$\det \begin{pmatrix} \partial^2_{A'} h^\star(A'_0, 0; 0) & \partial_{A'} \lambda(A'_0; 0) \\ \partial_{A'} \lambda(A'_0; 0) & \Lambda(A'_0; 0) \end{pmatrix}$$

Infatti, se tale condizione è verificata, si ha:

$$\begin{aligned} \det \partial^2_{(A',p)} \mathcal{H}_0(\eta_0) &= \det \begin{pmatrix} \partial^2_{A'} h^\star(A'_0, 0; 0) & \partial_{A'} \lambda(A'_0; 0) \cdot q_0 \\ \partial_{A'} \lambda(A'_0; 0) \cdot q_0 & \Lambda(A'_0; 0) \cdot q_0^2 \end{pmatrix} = \\ &= q_0^\ell \det \begin{pmatrix} \partial^2_{A'} h^\star(A'_0, 0; 0) & \partial_{A'} \lambda(A'_0; 0) \\ \partial_{A'} \lambda(A'_0; 0) \cdot q_0 & \Lambda(A'_0; 0) \cdot q_0 \end{pmatrix} = \\ &= q_0^{2\ell} \det \begin{pmatrix} \partial^2_{A'} h^\star(A'_0, 0; 0) & \partial_{A'} \lambda(A'_0; 0) \\ \partial_{A'} \lambda(A'_0; 0) & \Lambda(A'_0; 0) \end{pmatrix} \neq 0 \end{aligned}$$

che garantisce la (8.87) per μ piccoli.

[31]Infatti, posto $w = (u, v)$, la trasversalità implica che $\forall V = (y_1, Y_1, y_2, Y_2) \in \mathbf{R}^{\ell-1} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{\ell-1} \times \mathbf{R}$ $\exists (\psi, q) \in \mathbf{R}^{\ell-1} \times \mathbf{R}$ $\exists \Gamma$ curva su $\mathcal{N}$, $\Gamma(t) = (A'(w(t)), \psi(w(t)), p(w(t)), q(w(t)))$ in modo che

$$\begin{aligned} & (y_1, Y_1, y_2, Y_2) = V = (0, \psi, 0, q) + \Gamma'(0) = \\ = \ & (\partial_w A'(0) \cdot w'(0), \partial_w \psi(0) \cdot w'(0) + \psi, \partial_w p(0) \cdot w'(0), \partial_w q(0) \cdot w'(0) + q) \end{aligned}$$

$\bar{q}(A', p) \equiv q(u(A', p), 0)$, $\bar{\psi}(A', p) \equiv \psi(u(A', p), 0)$, si ha

$$\mathcal{N} \supseteq \{(A', \bar{\psi}(A', p), p, \bar{q}(A', p))\} \equiv \mathcal{N}'$$

(con A' e p opportunamente vicini a A'_0 e 0 rispettivamente). Denotiamo perciò

$$\Phi^t_{\mathcal{H}_\mu}(\mathcal{N}') = \{(\hat{A}'(A', p, t, \mu), \hat{\psi}(A', p, t, \mu), \hat{p}(A', p, t, \mu), \hat{q}(A', p, t, \mu))\} \quad (8.89)$$

Dico che $\exists \hat{t} \in (t^*, 0)$ tale che

$$\det \left. \frac{\partial(\hat{\psi}, \hat{q})}{\partial(A', p)} \right|_{t=\hat{t}, A'=A'_0, p=0} \neq 0 \quad (8.90)$$

Assumendo che ciò sia vero, la dimostrazione si conclude facilmente: per il Teorema di funzione inversa è $(A', p) = \mathcal{F}(\hat{\psi}, \hat{q}; \mu)$ con

$$(\hat{\psi}, \hat{q}) \circ \Big(\mathcal{F}(\psi, q; \mu), \hat{t}, \mu\Big) = (\psi, q)$$

In questo modo, ponendo

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{A}}(\psi, q; \mu) &\equiv \hat{A}' \Big(\mathcal{F}(\psi, q; \mu), \hat{t}, \mu\Big) \\ \tilde{\mathcal{P}}(\psi, q; \mu) &\equiv \hat{p} \Big(\mathcal{F}(\psi, q; \mu), \hat{t}, \mu\Big) \end{aligned}$$

dalla (8.89) si giunge alla (8.88).

Resta dunque da verificare la (8.90): supponiamo P.A. che, $\forall t \in (t^*, 0)$, $\det \partial_{(A', p)}(\hat{\psi}, \hat{q}) = 0$, con il determinante calcolato in $A' = A'_0$ e $p = 0$. Allora $\exists (a, b) \in \mathbf{R}^{\ell-1} \times \mathbf{R}$ in modo che

$$a \cdot \partial_{(A', p)} \hat{\psi}(A'_0, 0, t, \mu) = b \, \partial_{(A', p)} \hat{q}(A'_0, 0, t, \mu)$$

Da ciò (scrivendo $x \equiv w'(0)$), $\forall y = (y_1, y_2) \in \mathbf{R}^{\ell-1} \times \mathbf{R}$, $\exists x \in \mathbf{R}^{\ell+\ell'}$ in modo che $y = \frac{\partial(A', p)}{\partial w}(0)\, x$.

Ciò implica che $\mathrm{Ran}\, \frac{\partial(A', p)}{\partial w}(0) = \ell$; per cui, a meno di mettere all'inizio le ℓ colonne indipendenti, $\mathrm{Ran}\, \frac{\partial(A', p)}{\partial u}(0) = \ell$.

Per maggiori dettagli cfr. la dimostrazione del Lemma F.2.

$\forall t \in (t^*, 0)$. Derivando rispetto a t questa relazione, scambiando l'ordine delle derivate, facendo il limite per $t \longrightarrow 0$ e usando le equazioni di Hamilton, si ottiene

$$a \cdot \partial_{(A',p)} \partial_{A'} \mathcal{H}_\mu(\eta_0) = b \, \partial_{(A',p)} \partial_p \mathcal{H}_\mu(\eta_0)$$

cioè la matrice

$$\left(\partial_{(A',p)} \partial_{A'} \mathcal{H}_\mu(\eta_0) \quad \partial_{(A',p)} \partial_p \mathcal{H}_\mu(\eta_0) \right) = \partial^2_{(A',p)} \mathcal{H}_\mu(\eta_0)$$

è degenere, in contraddizione con l'ipotesi. □

In conclusione:

Teorema 8.7 *Consideriamo l'hamiltoniana*

$$H(A, \alpha, I, \varphi) \qquad\qquad (A, \alpha, I, \varphi) \in \mathbf{R}^{\ell-1} \times \mathbf{T}^{\ell-1} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$$

Supponiamo che esista una trasformazione canonica

$$\Phi : (A', \psi, p, q) \longrightarrow (A, \alpha, I, \varphi)$$

e una funzione $A' : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^{\ell-1}$ *in modo che*

- $\Phi^t_H \left(\Phi \left(A'(pq), \psi, p, q \right) \right) = \Phi \left(A'(pq), \psi + \omega(pq)\, t, pe^{-\lambda(pq)\, t}, qe^{\lambda(pq)\, t} \right)$, $\forall |p|, |q| \leq R \leq 1$*; con* $\omega(0)$ *diofantino.*
- $\mathcal{T} \equiv \{\Phi(A'(0), \psi, 0, 0),\ \psi \in \mathbf{T}^{\ell-1}\}$ *sia un toro coi baffi:*

$$\begin{aligned} W^s &\equiv \bigcup_{t \leq 0} \Phi^t_H \circ \{\Phi(A'(0), \psi, p, 0),\ \psi \in \mathbf{T}^{\ell-1},\ |p| \leq R\} \\ W^u &\equiv \bigcup_{t \geq 0} \Phi^t_H \circ \{\Phi(A'(0), \psi, 0, q),\ \psi \in \mathbf{T}^{\ell-1},\ |q| \leq R\} \end{aligned}$$

- *Posto* $\mathcal{H} \equiv H \circ \Phi$ *si abbia* $\mathcal{H}(A', \psi, p, q) = h(A', pq; \mu) + \mu f(A', \psi, p, q)$ *con* $\det \partial^2_{(A',p)} \mathcal{H} \neq 0$ *su* $W^u - \mathcal{T}$ *e* $\partial_p \mathcal{H} \neq 0$, $\forall A' = A'(pq)$, $\forall \psi \in \mathbf{T}^{\ell-1}$, $\forall |p| \leq R$, $\forall 0 < |q| \leq R$.

Allora $\mathcal{T}$ *è un toro di transizione secondo la Definizione 7.3, purchè* μ *sia sufficientemente piccolo.*

DIM. Sia $\tilde{\mathcal{M}} = \Phi(\mathcal{M})$ una varietà trasversa a W^u, con $H(\tilde{\mathcal{M}}) = H(\mathcal{T})$ e sia $\tilde{\zeta} = \Phi(\zeta)$ un qualsiasi punto di W^s. Per il Lemma precedente $\exists \hat{t} < 0$ tale che

$$\Phi_{\mathcal{H}}^{\hat{t}}(\mathcal{M}) \supseteq \{(\mathcal{A}(\psi;\mu), \psi, \mathcal{P}(\psi;\mu), q_0),\ |\psi - \psi_0| < c_1\} \equiv \mathcal{N}$$

Per il Teorema 8.2, arbitrariamente vicino a ζ si può trovare un punto z tale che

$$\Phi_{\mathcal{H}}^{t^\star}(z) \in \mathcal{N} \subseteq \Phi_{\mathcal{H}_\mu}^{\hat{t}}(\mathcal{M})$$

ovvero $\Phi_{\mathcal{H}}^{t^\star - \hat{t}}(z) \in \mathcal{M}$. Allora il punto $\tilde{z} \equiv \Phi(z)$ è arbitrariamente vicino a $\tilde{\zeta}$ e $\Phi_H^{t^\star - \hat{t}}(\tilde{z}) = \Phi_H^{t^\star - \hat{t}} \circ \Phi(z) = \Phi \circ \Phi_{\mathcal{H}}^{t^\star - \hat{t}}(z) \in \Phi(\mathcal{M}) = \tilde{\mathcal{M}}$. $\square$

9 Iperboliticità al primo ordine dei sistemi hamiltoniani "quasi-integrabili" in prossimità di risonanze semplici

Consideriamo l'hamiltoniana "quasi-integrabile" $H(I,\varphi) = h(I)+\varepsilon f(I,\varphi;\varepsilon)$, con $(I,\varphi) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{T}^N$. Mettiamoci nell'intorno di una risonanza di ordine 1, ad esempio supponiamo che $\bar{I}$ sia tale che

$$h'(\bar{I}) \cdot n = 0, \;\; n = (n_1, \ldots, n_N) \in \mathbf{N}^N \iff n_1 = \ldots = n_{N-1} = 0$$

ovvero che $\partial_{I_N} h(\bar{I}) = 0$ con $\partial_{(I_1,\ldots,I_{N-1})}(\bar{I})$ razionalmente indipendente. Allora, fissato $\nu \in \mathbf{N}$, $\nu \geq 2$, per il Teorema 4.7, esiste una trasformazione canonica, vicina all'identità per ε piccoli, che[1] trasforma l'hamiltoniana in

$$H^{[0]}(J,y,\psi,x) = h(J,y) + \varepsilon f^{[0]}(J,y,x;\varepsilon) + O(\varepsilon^\nu) \tag{9.1}$$

con $(J,y,\psi,x) \in \mathbf{R}^{N-1} \times \mathbf{R} \times \mathbf{T}^{N-1} \times \mathrm{S}^1$. Poniamo $\bar{J} \equiv (\bar{I}_1, \ldots, \bar{I}_{N-1})$ e $h^{[0]}(J,y,x;\varepsilon) \equiv h + \varepsilon f^{[0]}$.

Lemma 9.1 *Consideriamo il sistema* (9.1) *e fissiamo* $\bar{x} \in \mathrm{S}^1$ *in modo che*

$$\begin{array}{l} \partial_x f^{[0]}(\bar{I},\bar{x};0) = 0 \\ \partial^2_{I_N} h(\bar{I}) \cdot \partial^2_x f^{[0]}(\bar{I},\bar{x};0) \neq 0 \end{array} \tag{9.2}$$

Allora esistono (e sono uniche) due funzioni $y(J;\varepsilon)$ *e* $x(J;\varepsilon)$ *analitiche per* J *sufficientemente vicino a* $\bar{J}$ *e* ε *sufficientemente piccolo in modo che*

$$\begin{array}{rcl} y(\bar{J};0) & = & \bar{I}_N \\ x(\bar{J};0) & = & \bar{x} \\ \partial_y h^{[0]}\,(J,\; y(J;\varepsilon),\; x(J;\varepsilon);\; \varepsilon) & = & 0 \\ \partial_x h^{[0]}\,(J,\; y(J;\varepsilon),\; x(J;\varepsilon);\; \varepsilon) & = & 0 \end{array}$$

[1]Inoltre $f^{[0]}(J,y,x;0)$ è la media di f (calcolata in $\varepsilon = 0$) nelle variabili "veloci" $\varphi_1, \ldots, \varphi_{N-1}$. In questo modo, l'esistenza di un $\bar{x}$ che verifichi le successive (9.2) e (9.7) è assicurata da una condizione di genericità sulla media della perturbazione f nelle variabili "veloci". Al fine di ottenere le (9.2) e (9.7) è sufficiente richiedere che la media di f nelle variabili "veloci" calcolata in $I = \bar{I}$ e $\varepsilon = 0$ abbia un massimo e un minimo non degeneri.

DIM. Sia

$$\mathcal{L}(y,x,J,\varepsilon) \equiv \Big(\partial_y h^{[0]}(J,y,x;\varepsilon),\ \partial_x f^{[0]}(J,y,x;\varepsilon)\Big)$$

Per $\varepsilon = 0$ la trasformazione canonica che conduce a (9.1) è l'identità e $h^{[0]} = h$. Per cui

$$\mathcal{L}(\bar{I}_N,\bar{x},\bar{J},0) = \Big(\partial_{I_N} h(\bar{I}),\ \partial_x f^{[0]}(\bar{I},\bar{x};0)\Big) \overset{(9.2)}{=} 0$$

e

$$\det \partial_{(y,x)}\mathcal{L}(\bar{I}_N,\bar{x},\bar{J},0) = \det \begin{pmatrix} \partial_y^2 h(\bar{I}) & 0 \\ \partial_{xy}^2 f^{[0]}(\bar{I},\bar{x};0) & \partial_x^2 f^{[0]}(\bar{I},\bar{x};0) \end{pmatrix} \overset{(9.2)}{\neq} 0$$

La tesi segue dal Teorema del Dini. □

Il prossimo Lemma sposterà gli equilibri $y(J;\varepsilon)$ e $x(J;\varepsilon)$, trovati nel Lemma precedente, nell'origine:

Lemma 9.2 *Mantenendo le notazioni del Lemma precedente, definiamo la funzione generatrice*

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(J^{[1]},\ y^{[1]},\ \psi,\ x;\ \varepsilon) = \Big(x - x(J^{[1]};\varepsilon)\Big)\ y^{[1]} + \\ + y(J^{[1]};\varepsilon)\ \sin\Big(x - x(J^{[1]};\varepsilon)\Big)\ +\ \psi \cdot J^{[1]}\end{aligned}$$

La trasformazione canonica ad essa associata manda (9.1) *in una nuova hamiltoniana*

$$H^{[1]}(J^{[1]},y^{[1]},\psi^{[1]},x^{[1]}) = h^{[1]}(J^{[1]},y^{[1]},x^{[1]};\varepsilon) + O(\varepsilon^\nu) \tag{9.3}$$

con

$$\begin{aligned}\partial_{y^{[1]}} h^{[1]}(J^{[1]},0,0;\varepsilon) &= 0 \\ \partial_{x^{[1]}} h^{[1]}(J^{[1]},0,0;\varepsilon) &= 0\end{aligned} \tag{9.4}$$

DIM. È una verifica diretta. □

Assumiamo ora una condizione di iperboliticità al primo ordine, richiedendo che la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ \partial^2_{(y^{[1]},x^{[1]})} h^{[1]}$$

abbia un autovalore reale positivo e uno reale negativo nei pressi di $J^{[1]} = \bar{J}$, $x^{[1]} = y^{[1]} = 0$ per ogni $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo. Chiediamo cioè che, $\forall \varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo

$$\det \partial^2_{(y^{[1]},x^{[1]})} h^{[1]}(\bar{J}, 0, 0; \varepsilon) < 0 \tag{9.5}$$

Poichè per costruzione

$$\begin{array}{rl} & h^{[1]}(J^{[1]}, y^{[1]}, x^{[1]}; \varepsilon) = \\ = & h^{[0]}(J^{[1]},\ y^{[1]} + y(J^{[1]}; \varepsilon)\ \cos x^{[1]},\ x^{[1]} + x(J^{[1]}; \varepsilon);\ \varepsilon) = \\ & = h(J^{[1]},\ y^{[1]} + y(J^{[1]}; \varepsilon)\ \cos x^{[1]}) + \\ & +\varepsilon f^{[0]}(J^{[1]},\ y^{[1]} + y(J^{[1]}; \varepsilon)\ \cos x^{[1]},\ x^{[1]} + x(J^{[1]}; \varepsilon);\ \varepsilon) \end{array}$$

e ricordando che $\partial_y h^{[0]}(\bar{J},\ y(\bar{J}; \varepsilon),\ x(\bar{J}; \varepsilon); \varepsilon) = 0$, si ha che la (9.5) è equivalente alla richiesta

$$\det \begin{pmatrix} \partial^2_y h + \varepsilon \partial^2_y f^{[0]} & \varepsilon \partial^2_{xy} f^{[0]} \\ \varepsilon \partial^2_{xy} f^{[0]} & \varepsilon \partial^2_x f^{[0]} \end{pmatrix} < 0 \tag{9.6}$$

dove il determinante va calcolato in $J = \bar{J}$, $y = y(\bar{J}; \varepsilon)$ e $x = x(\bar{J}; \varepsilon)$. La (9.6) si traduce in

$$\varepsilon \left(\partial^2_y h(\bar{J},\ y(\bar{J}; \varepsilon))\ \partial^2_x f^{[0]}(\bar{J},\ y(\bar{J}; \varepsilon),\ x(\bar{J}; \varepsilon); \varepsilon) + O(\varepsilon) \right) < 0$$

la quale è garantita, per $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo da

$$\partial^2_{I_N} h(\bar{I}) \cdot \partial^2_x f^{[0]}(\bar{I}, \bar{x}; 0) < 0 \tag{9.7}$$

Osserviamo che per la richiesta di iperboliticità, se J è vicino a $\bar{J}$, la matrice

$$R(J; \varepsilon) \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ \partial^2_{(x^{[1]},y^{[1]})} h^{[1]}(J, 0, 0; \varepsilon)$$

ha due autovalori $\lambda(J; \varepsilon)$ e $-\lambda(J; \varepsilon)$ con $\lambda(J; \varepsilon) \neq 0$. Esplicitamente:

$$\begin{array}{rcl} \left(\lambda(\bar{J}, \varepsilon) \right)^2 & = & -\det \partial^2_{(x^{[1]},y^{[1]})} h^{[1]}(\bar{J}, 0, 0; \varepsilon) = \\ & = & -\varepsilon \left(\partial^2_y h(\bar{J},\ y(\bar{J}; \varepsilon))\ \partial^2_x f^{[0]}(\bar{J},\ y(\bar{J}; \varepsilon),\ x(\bar{J}; \varepsilon); \varepsilon) + O(\varepsilon) \right) \end{array}$$

Consideriamo i due autospazi corrispondenti: $R(cv) = \lambda\, cv$ e $R(dw) = -\lambda\, dw$ con $c, d \in \mathbf{R}$, $v, w \in \mathbf{R}^2$, $|v| = 1 = |w|$. A meno di scambiare λ con $-\lambda$ posso supporre che $\det \begin{pmatrix} v & w \end{pmatrix} > 0$.

Poniamo perciò $c \equiv d \equiv (\det(v \quad w))^{-1/4}$ e $M \equiv (cv \quad dw)$. Per costruzione $\det M = 1$ e $R = M\ \Lambda\ M^{-1}$, dove

$$\Lambda(J;\varepsilon) \equiv \begin{pmatrix} \lambda(J;\varepsilon) & 0 \\ 0 & -\lambda(J;\varepsilon) \end{pmatrix}$$

Si osservi che M, essendo una matrice di ordine 2 con determinante 1, è simplettica; quindi

$$\begin{pmatrix} y^{[2]} \\ x^{[2]} \end{pmatrix} \equiv M^{-1} \begin{pmatrix} y^{[1]} \\ x^{[1]} \end{pmatrix} \qquad\qquad J^{[2]} \equiv J^{[1]} \qquad\qquad \psi^{[2]} \equiv \psi^{[1]}$$

definisce una trasformazione canonica, che manda (9.3) nella nuova hamiltoniana

$$H^{[2]}(J^{[2]}, y^{[2]}, \psi^{[2]}, x^{[2]}) = h^{[2]}(J^{[2]}, y^{[2]}, x^{[2]}; \varepsilon) + O(\varepsilon^\nu) \tag{9.8}$$

con $h^{[2]}(J^{[2]}, y^{[2]}, x^{[2]}; \varepsilon) \equiv h^{[1]}\left(J^{[2]},\ M(y^{[2]}, x^{[2]});\ \varepsilon\right)$. Per cui

$$\begin{aligned}
& \partial^2_{(y^{[2]},x^{[2]})} h^{[2]}(J^{[2]}, 0, 0; \varepsilon) = M^*\ \partial^2_{(y^{[1]},x^{[1]})} h^{[1]}\left(J^{[2]},\ M(0,0); \varepsilon\right)\ M = \\
= \quad & -M^* \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2\ \partial^2_{(y^{[1]},x^{[1]})} h^{[1]}\left(J^{[2]}, 0, 0; \varepsilon\right)\ M = \\
= \quad & -M^* \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ R\, M = -M^* \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ M\Lambda = -\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ \Lambda
\end{aligned}$$

avendo usato ancora che M è simplettica. Facendo allora lo sviluppo di Taylor, ricordando che $\partial_{(y^{[1]},x^{[1]})} h^{[1]}(J^{[1]}, 0, 0; \varepsilon) = 0$, abbiamo che

$$\begin{aligned}
& h^{[2]}(J^{[2]}, y^{[2]}, x^{[2]}; \varepsilon) = \\
= \quad & h^{[2]}(J^{[2]}, 0, 0; \varepsilon) + \partial_{(y^{[2]},x^{[2]})} h^{[2]}(J^{[2]}, 0, 0; \varepsilon) \cdot (y^{[2]}, x^{[2]}) + \\
& + \frac{1}{2}(y^{[2]}, x^{[2]}) \cdot \partial^2_{(y^{[2]},x^{[2]})} h^{[2]}(J^{[2]}, 0, 0; \varepsilon)\ (y^{[2]}, x^{[2]}) + \\
& + \sum_{\substack{i+j=n \\ n\geq 3}} \Gamma^{[n]}_{ij} \cdot (y^{[2]})^i (x^{[2]})^j = \\
= \quad & h^{[2]}(J^{[2]}, 0, 0; \varepsilon) - \lambda(J;\varepsilon) y^{[2]} x^{[2]} + \sum_{\substack{i+j=n \\ n\geq 3}} \Gamma^{[n]}_{ij} \cdot (y^{[2]})^i (x^{[2]})^j
\end{aligned}$$

con $\Gamma^{[n]}_{ij} = \Gamma^{[n]}_{ij}(J^{[2]}; \varepsilon)$, che è l'ipotesi del Teorema 5.3.

Un sistema iperbolico al primo ordine può dunque essere canonicamente trasformato, applicando il Teorema 5.3 alla (9.8), in

$$\tilde{H}(A, \alpha, p, q) = \tilde{h}(A, pq; \varepsilon) + O(\varepsilon^\nu) \tag{9.9}$$

con $A \in \mathbf{R}^{N-1}$, $\alpha \in \mathbf{T}^{N-1}$, $p, q \in \mathbf{R}$, con (p,q) nelle vicinanze dell'origine; inoltre, $\forall \delta \in \mathbf{N}^{N-1}$:

$$\begin{aligned}\partial^\delta_A \tilde{h}(A, 0; \varepsilon) &= \partial^\delta_{J^{[2]}} h^{[2]}(A, 0, 0; \varepsilon) = \partial^\delta_{J^{[1]}} h^{[1]}(A, 0, 0; \varepsilon) = \\ &= \partial^\delta_J h^{[0]}\,(A,\, y(A;\varepsilon),\, x(A;\varepsilon);\, \varepsilon) \end{aligned} \tag{9.10}$$

e, denotando $\zeta \equiv pq$, $\partial_\zeta \tilde{h}(A, 0; \varepsilon) = \lambda(A; \varepsilon)$.

Assumiamo di più che $\bar{I}$ corrisponda a una frequenza $(\gamma, \tau)-$diofantina $\partial_A \tilde{h}(\bar{I}_1, \ldots, \bar{I}_{N-1}, 0; 0) = h'(\bar{I})$. Allora, se $\min\{\gamma,\, |\lambda(\bar{J}; 0)|\} > C\varepsilon^{\nu/2}$, dove C è una costante opportunamente grande (in modo che sia verificata la condizione (8.1)), sotto ipotesi di non degenerazione isoenergetica, si può applicare il Teorema 8.1, il quale assicura la conservazione dei tori parzialmente iperbolici che corrispondono a tale frequenza diofantina per il sistema (9.9), a un fissato livello di energia. Osserviamo che tale condizione di non degenerazione isoenergetica è localmente assicurata dall'invertibilità della matrice

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \partial^2_A \tilde{h}(\bar{I}_1, \ldots, \bar{I}_{N-1}, 0; 0) & \partial_A \tilde{h}(\bar{I}_1, \ldots, \bar{I}_{N-1}, 0; 0) \\ \partial_A \tilde{h}(\bar{I}_1, \ldots, \bar{I}_{N-1}, 0; 0) & 0 \end{pmatrix} \overset{(9.10)}{=} \\ = &\begin{pmatrix} \partial^2_{(\bar{I}_1, \ldots, \bar{I}_{N-1})} h(\bar{I}) & \partial_{(\bar{I}_1, \ldots, \bar{I}_{N-1})} h(\bar{I}) \\ \partial_{(\bar{I}_1, \ldots, \bar{I}_{N-1})} h(\bar{I}) & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

cioè dalla non degenerazione isoenergetica di h rispetto alle prime $N-1$ variabili

Abbiamo cosí dimostrato che il sistema $H(I, \varphi) = h(I) + \varepsilon f(I, \varphi; \varepsilon)$, se h e f sono generiche, possiede una struttura iperbolica al primo ordine in ε su un sottoinsieme di densità grande di ogni livello di energia nelle vicinanze di una risonanza semplice. Più precisamente abbiamo dimostrato il seguente:

Teorema 9.3 *Fissiamo $\nu \in \mathbf{N}$, $\nu \geq 2$. Consideriamo il sistema $H(I, \varphi) = h(I) + \varepsilon f(I, \varphi; \varepsilon)$ con $(I, \varphi) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{T}^N$. Sia $\bar{I}$ tale che $\partial_{I_N} h(\bar{I}) = 0$ e assumiamo che $\partial_{(I_1, \ldots, I_{N-1})} h(\bar{I})$ sia razionalmente indipendente. Denotiamo*

$$\mathcal{F}_{\bar{I}}(x) \equiv \frac{1}{\mathrm{mis}\mathbf{T}^{N-1}} \int_{\mathbf{T}^{N-1}} f(\bar{I}, \varphi_1, \ldots, \varphi_{N-1}, x; 0)\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_{N-1}$$

Assumiamo che esista $\bar{x}$ tale che

$$\partial_x \mathcal{F}_{\bar{I}}(\bar{x}) = 0\,, \quad \text{e} \quad \partial^2_{I_N} h(\bar{I}) \cdot \partial^2_x \mathcal{F}_{\bar{I}}(\bar{x}) < 0 \tag{9.11}$$

Allora esiste una trasformazione canonica $(I,\varphi) \longleftrightarrow (A,\alpha,p,q)$, *definita per* I_N *e* φ_N *nelle vicinanze rispettivamente di* $\bar{I}_N$ *e* $\bar{x}$, *con* $A \in \mathbf{R}^{N-1}$, $\alpha \in \mathbf{T}^{N-1}$, $p,q \in \mathbf{R}$ *con* p *e* q *nell'intorno dell'origine, in modo che la nuova hamiltoniana* $\tilde{H}$ *sia puramente iperbolica fino all'ordine* $\nu-1$, *cioè sia*

$$\tilde{H}(A,\alpha,p,q) = \tilde{h}(A,pq;\varepsilon) + O(\varepsilon^\nu)$$

Inoltre $\tilde{h}(A,0;0) = h(A,\bar{I}_N)$.

Fissiamo ora $\bar{I}$ *come sopra e consideriamo un opportuno intorno* $U_\nu \subseteq \mathbf{R}^N$ *di* $\bar{I}$. *Se* $K \geq N$, *denotiamo con* $\pi_K : \mathbf{R}^K \longrightarrow \mathbf{R}^{N-1}$ *la proiezione sulle prime* $N-1$ *coordinate, e sia* $V_\nu \equiv \pi_N(U_\nu)$. *Fissiamo poi* ε_0 *e* γ *in modo che*

$$\min\{\gamma,\ \sqrt{\varepsilon_0\,|\partial^2_{I_N} h(\bar{I})\partial^2_x \mathcal{F}(\bar{x})|}\} > C\varepsilon_0^{\nu/2} \tag{9.12}$$

(dove C *è una costante opportuna); assumiamo che* h *sia isoenergeticamente non degenere rispetto alle variabili* $I_1,\ldots,I_{N-1}$ *su una superficie di energia fissata.*

Allora, $\forall\varepsilon$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, *esiste una trasformazione canonica* $(I,\varphi) = \Phi(A',\alpha',p',q')$ *ed un insieme* $\Omega_\nu \subseteq V_\nu \subseteq \mathbf{R}^{N-1}$, *il cui complementare in* V_ν *ha misura non maggiore di* $O(\gamma)$, *tali che per tutti gli* (A',α',p',q') *verificanti*

$$\pi_{2N} \circ \Phi(A',\alpha',p',q') \in \Omega_\nu$$

si ha che $H \circ \Phi(A',\alpha',p',q')$ *dipende solo da* A' *e dal prodotto di* p' *per* q'.

Si ottengono cosí dei tori invarianti $(N-1)-$*dimensionali*

$$\mathcal{T}_{A'} = \{(A',\alpha',0,0),\ \ \alpha' \in \mathbf{T}^{N-1}\}$$

con baffi $N-$*dimensionali*

$$\begin{aligned} & W^{[1]}_{A'} = \{(A',\alpha',p',0),\ \ \alpha' \in \mathbf{T}^{N-1},\ |p'| \leq r\} \\ \textit{e} \qquad & W^{[2]}_{A'} = \{(A',\alpha',0,q'),\ \ \alpha' \in \mathbf{T}^{N-1},\ |q'| \leq r\} \end{aligned}$$

con densità $1 - O(\gamma)$ *sul livello di energia.*

In particolare, tale risultato segue con $\gamma = O(\varepsilon_0^{\nu/2})$ *in modo da verificare la* (9.12)*; in questo caso la misura del complementare di* Ω_ν *ha misura non maggiore di* $O(\varepsilon_0^{\nu/2})$ *e i tori insieme ai loro baffi hanno densità* $1 - O(\varepsilon_0^{\nu/2})$ *sul livello di energia.*

Ad esempio, consideriamo il sistema

$$H(I,\varphi) = \frac{1}{2}|I|^2 + \varepsilon \cos\varphi_N + \varepsilon^{a+1} \sum_{j=1}^{N-1} \cos(\varphi_j + \varphi_N) \tag{9.13}$$

con $a \geq 0$ fissato, nelle vicinanze dei punti $(I_1, \ldots, I_{N-1}) = \varpi$, $I_N = 0$ con ϖ $(\gamma,\tau)-$diofantino. La Proposizione 6.4 assicura la non degenerazione isoenergetica. Con le notazioni del Teorema 9.3 abbiamo

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{(\varpi,0)}(x) &= \frac{1}{\mathrm{mis}\mathbf{T}^{N-1}} \int_{\mathbf{T}^{N-1}} \left(\cos x + \varepsilon^a \sum_{j=1}^{N-1} \cos(\varphi_j + x) \right) d\varphi_1 \ldots d\varphi_{N-1} = \\ &= \cos x \end{aligned}$$

per cui scegliamo $\bar{x} = 0$ al fine di verificare la (9.11). La relazione tra γ e ε, data dalla (9.12), è in questo caso $\min\{\gamma, \sqrt{\varepsilon_0}\} > C\varepsilon_0^{\nu/2}$. Per cui, fissando $\nu = 2$, si conservano tutti i tori iperbolici corrispondenti a frequenze $(\gamma,\tau)-$diofantine, con $\gamma = O(\varepsilon_0)$.

Parte III
Appendici

A Un risultato di algebra lineare

Dati due vettori $v = (v_1, \ldots, v_n)$ e $w = (w_1, \ldots, w_m)$ definiamo

$$v * w \equiv \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} (w_1, \ldots, w_m) = \begin{pmatrix} v_1 w_1 & \ldots & v_1 w_m \\ \vdots & & \vdots \\ v_n w_1 & \ldots & v_n w_m \end{pmatrix} \tag{A.1}$$

Lemma A.1 *Sia $L \in \mathrm{Mat}(\ell \times (\ell + k))$ e $r_1, \ldots, r_k$ vettori riga. Sia $v = (v_1, \ldots, v_\ell)$ un vettore $\ell-$dimensionale. Allora, $\forall i = 1, \ldots, k$,*

$$\det \begin{pmatrix} L \\ r_1 \\ \vdots \\ r_k \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} L + v * r_i \\ r_1 \\ \vdots \\ r_k \end{pmatrix} \tag{A.2}$$

Sia $M \in \mathrm{Mat}((\ell + k) \times \ell)$ e $c_1, \ldots, c_k$ vettori colonna. Allora, $\forall i = 1, \ldots, k$,

$$\det \begin{pmatrix} M & c_1 & \ldots & c_k \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} M + c_i * v & c_1 & \ldots & c_k \end{pmatrix} \tag{A.3}$$

DIM. Denoto $L^{(j)}$ la $j-$esima riga della matrice L.

$$\det \begin{pmatrix} L + v * r_i \\ r_1 \\ \vdots \\ r_k \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} L^{(1)} + v_1 r_i \\ \vdots \\ L^{(\ell)} + v_\ell r_i \\ r_1 \\ \vdots \\ r_k \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} L^{(1)} \\ \vdots \\ L^{(\ell)} \\ r_1 \\ \vdots \\ r_k \end{pmatrix}$$

avendo usato la Proposizione 6.7 di [S1]. Ciò prova la (A.2). La (A.3) è analoga. □

Proposizione A.2 *Sia $A \in \mathrm{Mat}(\ell \times \ell)$. Siano a, b, c, d vettori $\ell-$dimensionali e $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ con $\beta \neq 0 \neq \gamma$. Allora*[1]

$$\det \begin{pmatrix} A & a & b \\ c & \alpha & \gamma \\ d & \beta & 0 \end{pmatrix} = (-\gamma\beta)^{-\ell+1} \det\left((\gamma a - \alpha b) * d - \beta(\gamma A - b * c)\right) \tag{A.4}$$

[1] Nella matrice a primo membro di (A.4) a e b vanno pensati come vettori colonna, c e d come vettori riga; la matrice a primo membro ha ordine $\ell + 2$, quella a secondo membro ha ordine ℓ. La (A.4) è ovvia, sviluppando il determinante lungo l'ultima riga, se $\ell = 1$.

DIM. Usando la linearità del determinante:

$$
\begin{aligned}
& \det\begin{pmatrix} A & a & b \\ c & \alpha & \gamma \\ d & \beta & 0 \end{pmatrix} = \gamma^{-\ell} \det\begin{pmatrix} \gamma A & \gamma a & \gamma b \\ c & \alpha & \gamma \\ d & \beta & 0 \end{pmatrix} \overset{(A.2)}{=} \\
= \;& \gamma^{-\ell} \det\begin{pmatrix} (\gamma A \;\; \gamma a \;\; \gamma b) - b * (c \;\; \alpha \;\; \gamma) \\ c \;\; \alpha \;\; \gamma \\ d \;\; \beta \;\; 0 \end{pmatrix} = \\
= \;& \gamma^{-\ell} \det\begin{pmatrix} \gamma A - b * c & \gamma a - \alpha b & 0 \\ c & \alpha & \gamma \\ d & \beta & 0 \end{pmatrix} = \\
= \;& (\gamma\beta)^{-\ell} \det\begin{pmatrix} \beta(\gamma A - b * c) & \gamma a - \alpha b & 0 \\ \beta c & \alpha & \gamma \\ \beta d & \beta & 0 \end{pmatrix} \overset{(A.3)}{=} \\
= \;& (\gamma\beta)^{-\ell} \det\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta(\gamma A - b * c) \\ \beta c \\ \beta d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \gamma a - \alpha b \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} * d & \begin{matrix} \gamma a - \alpha b & 0 \\ \alpha & \gamma \\ \beta & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} = \\
= \;& (\gamma\beta)^{-\ell} \det\begin{pmatrix} \beta(\gamma A - b * c) - (\gamma a - \alpha b) * d & \gamma a - \alpha b & 0 \\ \beta c - \alpha d & \alpha & \gamma \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix} = \\
= \;& (\gamma\beta)^{-\ell} \cdot (-1)^{2\ell+3} \gamma \det\begin{pmatrix} \beta(\gamma A - b * c) - (\gamma a - \alpha b) * d & \gamma a - \alpha b \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \\
= \;& (\gamma\beta)^{-\ell} \cdot (-1)^{2\ell+3} \gamma \cdot (-1)^{2\ell+2} \beta \det\left(\beta(\gamma A - b * c) - (\gamma a - \alpha b) * d \right)
\end{aligned}
$$

provando l'asserto. $\square$

Tale risultato si usa nella Proposizione 6.3.

B Un teorema di dipendenza C^n dai dati iniziali

Teorema B.1 *Consideriamo il sistema $\dot{x} = f(x)$, con $f \in C^\infty(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R})$. Denotiamo con $\Phi^t(x_0)$ la soluzione di tale problema con dato iniziale x_0. Allora, fissato t, la mappa $y \mapsto \Phi^t(y)$ è un diffeomorfismo C^∞. Inoltre, $\forall n \in \mathbf{N}$ esistono due costanti c_n e G_n in modo che, $\forall t \geq 0$*

$$\sum_{\substack{\alpha \in \mathbf{N}^N \\ |\alpha| \leq n}} \left| \left.\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha}\right|_{y=\xi} \Phi^t(y) - \left.\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha}\right|_{y=\eta} \Phi^t(y) \right| \leq c_n e^{G_n t} |\xi - \eta| \tag{B.1}$$

DIM. Da [GAL] pagg. 33-36 ottengo che $y \mapsto \Phi^t(y)$ è un diffeomorfismo C^∞ e che

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha}\Phi^t(y) = \frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha} f(\Phi^t(y)) \stackrel{(8.57)}{=} \\ = & \sum_{\substack{1 \leq |\beta| \leq |\alpha|,\ 1 \leq k \leq |\alpha| \\ 1 \leq |\sigma^1|, \ldots, |\sigma^k| \leq |\alpha| - |\beta| + 1 \\ |\sigma^1| + \ldots + |\sigma^k| = |\alpha| \\ 1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq N}} a_{\alpha\beta\sigma^1\ldots\sigma^k i_1 \ldots i_k}\, \partial_x^\beta f_m(\Phi^t(y), t)\, \partial_y^{\sigma^1} \Phi^t_{i_1} \ldots \partial_y^{\sigma^k} \Phi^t_{i_k} \equiv \\ \equiv & F_\alpha \left(\partial_y^\sigma \Phi^t(y),\ 0 \leq |\sigma| \leq |\alpha| \right) \end{aligned} \tag{B.2}$$

Proviamo la (B.1) per induzione su n: per $n = 0$ è il Teorema di dipendenza continua dai dati iniziali (cfr [C], pag. 150). Assumiamo poi come ipotesi iduttiva che $\forall t \geq 0$

$$\sum_{\substack{\alpha \in \mathbf{N}^N \\ |\alpha| \leq n-1}} \left| \left.\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha}\right|_{y=\xi} \Phi^t(y) \left.\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha}\right|_{y=\eta} \Phi^t(y) \right| \leq c_{n-1} e^{G_{n-1} t} |\xi - \eta| \tag{B.3}$$

Siano $c^\star_{n-1} \equiv \max\{1, c_1, \ldots, c_{n-1}\}$ e $G^\star_{n-1} \equiv \max\{1, G_1, \ldots, G_{n-1}\}$. Si osservi che $\forall \bar{y}$ e $\forall |\alpha| \geq 1$

$$\left.\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha}\right|_{y=\bar{y}} \Phi^0_j(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } |\alpha| \geq 2 \\ \delta_{ij} & \text{se } \alpha = e_i \end{cases} \tag{B.4}$$

Fissiamo $t^\star \geq 0$ e sia $0 < t < t^\star$ e $|\alpha| = n$. Poniamo

$$g(t) \equiv \sum_{|\alpha| = n} \left| \frac{\left.\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha}\right|_{y=\xi} \Phi^t(y) - \left.\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha}\right|_{y=\eta} \Phi^t(y)}{t} \right|$$

Si noti che g può essere definita anche per $t = 0$:

$$\begin{aligned}
g(0) &= \lim_{t\to 0}\left|\frac{\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha}\Big|_{y=\xi}\Phi^t(y) - \frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha}\Big|_{y=\eta}\Phi^t(y)}{t}\right| \overset{(B.4)}{=} \\
&= \lim_{t\to 0}\left|\frac{\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha}\Big|_{y=\xi}\Phi^t(y) - \frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha}\Big|_{y=\xi}\Phi^0(y)}{t} - \right. \\
&\qquad \left. - \frac{\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha}\Big|_{y=\eta}\Phi^t(y) - \frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha}\Big|_{y=\eta}\Phi^0(y)}{t}\right| = \\
&= \left|\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha}\Big|_{y=\xi}\Phi^t(y) - \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha}\Big|_{y=\eta}\Phi^t(y)\right| = \\
&= \left|F_\alpha\left(\partial_y^\sigma\Phi^0(\xi),\ 0\le|\sigma|\le|\alpha|\right) - F_\alpha\left(\partial_y^\sigma\Phi^0(\eta),\ 0\le|\sigma|\le|\alpha|\right)\right|
\end{aligned}$$

Abbiamo che, $\forall 0 < t < t^\star$, per opportune M_n e $\tilde{M}_n$,

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha}\Big|_{y=\xi}\Phi^0(y) - \frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha}\Big|_{y=\eta}\Phi^0(y)\right| \overset{(B.4)}{=} \\
= &\left|\int_0^t \frac{d}{dt}\Big|_{t=s}\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha}\Big|_{y=\xi}\Phi^t(y) - \frac{d}{dt}\Big|_{t=s}\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha}\Big|_{y=\eta}\Phi^t(y)\,ds\right| \le \\
\le &\int_0^t \left|F_\alpha\left(\partial_y^\sigma\Phi^s(\xi),\ 0\le|\sigma|\le|\alpha|\right) - F_\alpha\left(\partial_y^\sigma\Phi^s(\eta),\ 0\le|\sigma|\le|\alpha|\right)\right| ds \le \\
\le &\ M_n\int_0^t \sum_{0\le|\beta|\le|\alpha|}\left|\frac{\partial^\beta}{\partial y^\beta}\Big|_{y=\xi}\Phi^s(y) - \frac{\partial^\beta}{\partial y^\beta}\Big|_{y=\eta}\Phi^s(y)\right| ds \le \\
\le &\ M_n\int_0^t c_{n-1}^\star\, e^{G_{n-1}^\star s}\,|\xi-\eta| + \\
&+ \sum_{|\beta|=n}\left|\frac{\partial^\beta}{\partial y^\beta}\Big|_{y=\xi}\Phi^s(y) - \frac{\partial^\beta}{\partial y^\beta}\Big|_{y=\eta}\Phi^s(y)\right| ds \le \\
\le &\ \tilde{M}_n\left(c_{n-1}^\star\,\frac{e^{G_{n-1}^\star t}-1}{G_{n-1}^\star}|\xi-\eta| + \right. \\
&\left. + \int_0^t \sum_{|\beta|=n}\left|\frac{\partial^\beta}{\partial y^\beta}\Big|_{y=\xi}\Phi^s(y) - \frac{\partial^\beta}{\partial y^\beta}\Big|_{y=\eta}\Phi^s(y)\right| ds\right)
\end{aligned}$$

grazie anche all'ipotesi induttiva. Da cui, con $\bar{M}_n$ opportuna

$$
\begin{aligned}
& g(t) \leq \bar{M}_n \left(c^\star_{n-1} \frac{e^{G^\star_{n-1} t} - 1}{G^\star_{n-1} t} \, |\xi - \eta| + \right. \\
& \left. + \int_0^t \sum_{|\beta|=n} \left| \frac{\frac{\partial^\beta}{\partial y^\beta}\Big|_{y=\xi} \Phi^s(y) - \frac{\partial^\beta}{\partial y^\beta}\Big|_{y=\eta} \Phi^s(y)}{t} \right| ds \right) \leq \\
\leq \; & \bar{M}_n \left(c^\star_{n-1} e^{G^\star_{n-1} t} \, |\xi - \eta| + \int_0^t \sum_{|\beta|=n} \left| \frac{\frac{\partial^\beta}{\partial y^\beta}\Big|_{y=\xi} \Phi^s(y) - \frac{\partial^\beta}{\partial y^\beta}\Big|_{y=\eta} \Phi^s(y)}{s} \right| ds \right) \leq \\
\leq \; & \bar{M}_n \left(c^\star_{n-1} e^{G^\star_{n-1} t^\star} |\xi - \eta| + \int_0^t g(s) \, ds \right) \equiv \Gamma(t)
\end{aligned}
$$

Otteniamo cosí $\dot{\Gamma}(t) = \bar{M}_n \, g(t) \leq \bar{M}_n \Gamma(t)$, da cui $\Gamma(t) \leq \Gamma(0) \, e^{\bar{M}_n t}$, ovvero

$$
g(t) \leq \Gamma(t) \leq \bar{M}_n \, c^\star_{n-1} \, e^{G^\star_{n-1} t^\star + \bar{M}_n t} \, |\xi - \eta|
$$

Quindi, $\forall 0 < t < t^\star$:

$$
\begin{aligned}
& \left| \frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha}\Big|_{y=\xi} \Phi^t(y) - \frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha}\Big|_{y=\eta} \Phi^t(y) \right| \leq \bar{M}_n \, c^\star_{n-1} \, t^\star \, e^{G^\star_{n-1} t^\star + \bar{M}_n t} \, |\xi - \eta| \leq \\
\leq \; & \bar{M}_n \, c^\star_{n-1} \, e^{2(G^\star_{n-1} + \bar{M}_n) t^\star} \, |\xi - \eta|
\end{aligned}
$$

Facendo il limite per $t \longrightarrow t^\star$ si completa il passo induttivo, essendo $t^\star$ arbitrario. $\square$

C Esempio di una serie che converge quasi ovunque, ma diverge su un insieme denso

Questa è un'applicazione della Proposizione 3.2:

Proposizione C.1 *La serie*[1]

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}^2} (\cos n\cdot x)^{|n|^3}$$

converge quasi ovunque, ma diverge su un insieme denso.

DIM. Supponiamo che x sia $(\gamma, 2)$-diofantino.

Poichè $\theta^{-2}(\cos\theta - 1) \xrightarrow{\theta\to 0} -1/2$, è $\cos\theta \le 1 - \theta^2/4$ purchè $|\theta| < \theta_0$. E visto che $(1-\gamma^2/(4y^2))^{y^2} \xrightarrow{y\to\infty} e^{-\gamma^2/4} < 1$ allora $\exists y_0 > 0$ e $c > 1$ in modo che, se $y > y_0$, $(1-\gamma^2/(4y^2))^{y^2} \le 1/c$. Sia allora $|n| > \max\{\sqrt{\gamma\theta_0^{-1}}, y_0\}$:

$$\left|(\cos n\cdot x)^{|n|^3}\right| \le \left(\cos\frac{\gamma}{|n|^2}\right)^{|n|^3} \le \left(1 - \frac{\gamma^2}{4\,|n|^2}\right)^{|n|^3} \le \frac{1}{c^{|n|}}$$

che mostra la convergenza della serie.

Supponiamo invece x razionalmente dipendente: sia $\nu \in \mathbf{Z}^2 - \{0\}$ tale che $\nu\cdot x = 0$. Poniamo, $\forall k \in \mathbf{N}$, $n_k \equiv k\nu$: n_k è grande con k e $(\cos n_k\cdot x)^{|n_k|^3} = 1$. Per cui non è verificata la condizione necessaria alla convergenza. $\square$

Si osservi che la definizione di $\sum_{n\in\mathbf{Z}^p}\alpha_n$ richiede, se $p \ge 2$, un po' di cautela, in quanto è in generale subordinata alla scelta di un'*invasione* di $\mathbf{Z}^p$, cioè di una famiglia di insiemi $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ tali che $\#U_j = j$, $U_j \subset U_{j+1}$ e $\cup U_j = \mathbf{Z}^p$. Definiamo perciò

$$\sigma_j(\mathcal{U}) \equiv \sum_{n\in U_j}\alpha_n$$

[1] "Unica è la morte e 2 i buoi
e 3 le parti, 4 le pietre,
5 le età e 6 le erbe
e 7 sono i soli e 7 le lune
8 sono i fuochi e 9 le fanciulle
ma 10 i vascelli e 11 i guerrieri
e 12 i segni e 12 i mesi
e unica è la morte."
(Angelo Branduardi - *La serie dei numeri*)

e

$$\sum_{n\in\cup U_j} \alpha_n \equiv \lim_{j\to\infty} \sigma_j(\mathcal{U})$$

Se tale limite esiste, diremo che la serie, calcolata sull'invasione $\mathcal{U}$ è convergente, se non esiste, diremo che la serie, calcolata sull'invasione $\mathcal{U}$ è divergente.

Se tale limite esiste, allora $\exists j(\varepsilon)$ tale che $\forall i, j \geq j(\varepsilon)$ si abbia $|\sigma_i - \sigma_j| \leq \varepsilon$. In particolare, scegliendo $i = j + 1$, si ottiene che condizione necessaria alla convergenza è che per ogni successione $n_1 \neq n_2 \neq \ldots \neq n_k \neq \ldots \in \mathbf{Z}^p$ si abbia $\lim_{k\to\infty} \alpha_{n_k} = 0$.

Se c'è convergenza assoluta, il valore della serie è indipendente dall'invasione scelta, per cui si può scrivere semplicemente $\sum_{n\in\mathbf{Z}^p}$.

La precedente Proposizione afferma cosí che, fissata una qualsiasi invasione di $\mathbf{Z}^2$, la serie $\sum (\cos n \cdot x)^{|n|^3}$ converge (assolutamente) per x in un insieme di misura piena, e diverge per x in un insieme denso.

D Stima del resto nel teorema della media di Birkhoff (I)

Lemma D.1

$$\#\{1 \le j_1, \ldots, j_p \le A,\ j_1 + \ldots + j_p = B\} < 2^{p+B}$$

DIM. Per induzione su p:

$$\#\{1 \le j_1, \ldots, j_p \le A,\ j_1 + \ldots + j_p = B\} =$$

$$= \# \bigcup_{t=1}^{A} \{1 \le j_1, \ldots, j_{p-1} \le A,\ j_p = t,\ j_1 + \ldots + j_p = B\} =$$

$$= \sum_{t=1}^{A} \#\{1 \le j_1, \ldots, j_{p-1} \le A,\ j_1 + \ldots + j_{p-1} = B - t\} <$$

$$< \sum_{t=1}^{A} 2^{p-1+B-t} < 2^{p-1+B} \sum_{t \ge 0} 2^{-t} = 2^{p+B}$$

□

Lemma D.2 *Sia* $0 \le \delta \le 1/2$. *Allora*

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}^N} |n|\, e^{-\delta\,|n|} \le \frac{2^N e^{N+1} N}{\delta^{N+1}}$$

DIM. Se $|x| < 1$

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}^N} x^{|n|} = \sum_{n_1, \ldots, n_N \in \mathbf{Z}} x^{|n_1|} \ldots x^{|n_N|} =$$

$$= \left(\sum_{m \in \mathbf{Z}} x^{|m|} \right)^N \le 2^N \left(\sum_{m \in \mathbf{N}} x^m \right)^N = \frac{2^N}{(1-x)^N}$$

Derivando si giunge a

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}^N} |n|\, x^{|n|-1} = \frac{2^N N}{(1-x)^{N+1}}$$

da cui

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}^N} |n|\, e^{-\delta\,|n|} \leq \sum_{n\in\mathbf{Z}^N} |n|\, e^{-\delta\,|n|}\, e^{\delta} = \frac{2^N N}{(1-e^{-\delta})^{N+1}}$$

e, poichè $1-e^{-\delta} \geq \delta\, e^{-1}$ per $0 \leq \delta \leq 1/2$, si ha la tesi. □

Lemma D.3 *Siano $\alpha, \beta \geq 0$ e sia M_j la ricorrenza definita da*

$$M_j = \alpha + \frac{\beta}{j}\sum_{i=1}^{j-1} M_i \qquad\qquad M_1 = \alpha$$

Allora è:

$$M_j \leq \alpha \sum_{m=0}^{j-1} \frac{k^m \beta^m}{m!} \qquad\qquad \forall 1 \leq j \leq k$$

In particolare $M_j \leq \alpha e^{k\beta}$,$\forall 1 \leq j \leq k$.

DIM. Per induzione:

$$\begin{aligned} M_j &\leq \alpha + \frac{\beta}{j}\sum_{i=1}^{j-1} \alpha \sum_{n=0}^{i-1} \frac{k^n\beta^n}{n!} = \alpha + \alpha \sum_{i=1}^{j-1}\sum_{n=0}^{i-1} \frac{k^{n+1}\beta^{n+1}}{kj\, n!} = \\ &= \alpha + \alpha \sum_{i=1}^{j-1}\sum_{m=1}^{i} \frac{k^m\beta^m}{kj\,(m-1)!} = \alpha + \alpha \sum_{m=1}^{j-1}\sum_{i=m}^{j-1} \frac{k^m\beta^m}{kj\,(m-1)!} = \\ &= \alpha + \alpha \sum_{m=1}^{j-1} \frac{j-1-m}{kj\,(m-1)!}\, k^m\beta^m \leq \alpha + \alpha \sum_{m=1}^{j-1} \frac{1}{k\,(m-1)!}\, k^m\beta^m \leq \\ &\leq \alpha + \alpha \sum_{m=1}^{j-1} \frac{1}{m!}\, k^m\beta^m = \alpha \sum_{m=0}^{j-1} \frac{1}{m!}\, k^m\beta^m \end{aligned}$$

□

Teorema D.4 *Consideriamo l'hamiltoniana $H(I,\varphi) = h(I) + \varepsilon f(I,\varphi)$, con f polinomio trigonometrico di grado P. Supponiamo h reale analitica su $\{I \in \mathbf{C}^N$ con $|I-I_0| \leq \rho_0\}$ e f reale analitica su $\{I \in \mathbf{C}^N$ con $|I-I_0| \leq \rho_0\} \times \mathbf{T}^N_\xi$. Siano*[1]

$$\gamma \equiv \min_{\substack{0<|n|\leq kP \\ |I-I_0|\leq\rho_0}} |h'\cdot n|$$

[1]Denoterò $|F|_{\xi,\rho} \equiv \sup\{|F(y,\varphi;\varepsilon)|,\ \varphi \in \mathbf{T}^N_\xi,\ y \in \mathbf{C}^N$ con $|y-I_0| \leq \rho,\ |\varepsilon| \leq \varepsilon_0\}$.

$$\delta = \delta(k) \equiv \frac{\xi}{2k}$$
$$\alpha \equiv |f|_{\xi_0,\rho_0}$$
$$\beta = \beta(k) \equiv |h'|_{\xi_0,\rho_0} \cdot \frac{2^N e^{N+1} N^2 k}{\delta^{N+1}\gamma}$$
$$W \equiv \max\left\{ \max_{\substack{1\le i_1,\dots,i_p\le N\\ 0\le p\le k+1}} \left| \frac{\partial^p H}{\partial I_{i_1}\dots\partial I_{i_p}} \right|_{\frac{\rho_0}{2}}, \max_{\substack{1\le i_1,\dots,i_p\le N\\ 0\le p\le k}} \left| \frac{\partial^p f}{\partial I_{i_1}\dots\partial I_{i_p}} \right|_{\frac{\xi}{2},\frac{\rho_0}{2}} \right\}$$

Allora[2] *H viene trasformata mediante l'algoritmo descritto nel teorema della media in*

$$\mathcal{H}(y,x) = h(y) + \sum_{j=1}^{k} \varepsilon^j g_j(y) + \varepsilon^{k+1} R_k(y, \varphi(y,x); \varepsilon)$$

con

$$|R_k|_{\frac{\xi}{2},\frac{\rho_0}{2}} \le \frac{2^{k+2}\, W \exp(\frac{\rho_0}{k})}{\varepsilon_0^{k+1}}$$

purchè $\varepsilon_0 << 1$ verifichi

$$\sum_{j=1}^{k} \varepsilon_0^j \sup_{\varphi\in\mathbf{T}^n} |\frac{\partial^2 \chi_j(y_0,\varphi)}{\partial y \partial\varphi}| < 1$$

e

$$\varepsilon_0 \le \frac{\gamma\rho_0\delta^{N+1}}{(2e)^{N+1} N^2 k\alpha e^{k\beta}}$$

Quindi si ottiene

$$\varepsilon_0 = O\left(1/c_2^{(k/\gamma)^{c_3}}\right) \quad \text{e} \quad |R_k| \le O\left(c_4^{(k/\gamma)^{c_5}}\right)$$

con c_i costanti opportune.

DIM. La funzione generatrice del teorema della media è

$$\mathcal{G}(y,\varphi) = y\cdot\varphi + \sum_{j=1}^{k} \varepsilon^j \chi_j$$

[2]Se h' è non risonante, $\gamma > 0$ per un'opportuna ρ_0.

dove

$$\chi_s(y,\varphi) = \sum_{\substack{n\in\mathbf{Z}^N\\ 0<|n|\le sP}} \frac{i(\hat{\Gamma}_s)_n}{n\cdot\omega} e^{in\cdot\varphi}$$

con $\Gamma_1 = f$ e

$$\Gamma_s(y,\varphi;\varepsilon) \equiv [h(y+\sum_{j=1}^{s-1}\varepsilon^j\partial_\varphi\chi_j)]_s + [f(y+\sum_{j=1}^{s-1}\varepsilon^j\partial_\varphi\chi_j,\varphi)]_{s-1}$$

Dal fatto che

$$\mathcal{H}(y,\varphi) = h(y+\sum_{j=1}^{k}\varepsilon^j\chi_j) + \varepsilon f(y+\sum_{j=1}^{k}\varepsilon^j\chi_j,\varphi)$$

si giunge, prendendo l'ordine $k+1$ a

$$R_k = [\mathcal{H}]_{k+1} = [h(y+\sum_{j=1}^{k}\varepsilon^j\chi_j)]_{k+1} + [f(y+\sum_{j=1}^{k}\varepsilon^j\chi_j,\varphi)]_k$$

Sviluppando in serie di Taylor si ha:

$$h(y+\sum_{j=1}^{k}\varepsilon^j\partial_\varphi\chi_j) = \sum_{p\ge 0}\sum_{1\le i_1,\ldots,i_p\le N}\frac{1}{p!}\frac{\partial^p h(y)}{\partial I_{i_1}\ldots\partial I_{i_p}}\sum_{1\le j_1,\ldots j_p\le k}\varepsilon^{j_1+\ldots+j_p}\frac{\partial\chi_{j_1}}{\partial\varphi_{i_1}}\cdots\frac{\partial\chi_{j_p}}{\partial\varphi_{i_p}}$$

e quindi

$$[h(y+\sum_{j=1}^{k}\varepsilon^j\partial_\varphi\chi_j)]_{k+1} = \sum_{p\ge 0}\sum_{1\le i_1,\ldots,i_p\le N}\sum_{\substack{1\le j_1,\ldots j_p\le k\\ j_1+\ldots+j_p=k+1}}\frac{1}{p!}\frac{\partial^p h(y)}{\partial I_{i_1}\ldots\partial I_{i_p}}\frac{\partial\chi_{j_1}}{\partial\varphi_{i_1}}\cdots\frac{\partial\chi_{j_p}}{\partial\varphi_{i_p}}$$

e in modo analogo si ottiene

$$[f(y+\sum_{j=1}^{k}\varepsilon^j\partial_\varphi\chi_j,\varphi)]_k = \sum_{p\ge 0}\sum_{1\le i_1,\ldots,i_p\le N}\sum_{\substack{1\le j_1,\ldots j_p\le k\\ j_1+\ldots+j_p=k}}\frac{1}{p!}\frac{\partial^p f(y,\varphi)}{\partial I_{i_1}\ldots\partial I_{i_p}}\frac{\partial\chi_{j_1}}{\partial\varphi_{i_1}}\cdots\frac{\partial\chi_{j_p}}{\partial\varphi_{i_p}}$$

da cui[3]

[3]Notare che

$$\{p\ge 0,\ 1\le j_1,\ldots j_p\le k,\ j_1+\ldots+j_p=\tau\} = \{0\le p\le\tau,\ 1\le j_1,\ldots j_p\le k,\ j_1+\ldots+j_p=\tau\}$$

$$R_k(y,\varphi;\varepsilon) = \sum_{p=0}^{k+1} \sum_{1\le i_1,\dots,i_p\le N} \sum_{\substack{1\le j_1,\dots j_p\le k \\ j_1+\dots+j_p=k+1}} \frac{1}{p!}\frac{\partial^p h(y)}{\partial I_{i_1}\dots\partial I_{i_p}}\frac{\partial\chi_{j_1}}{\partial\varphi_{i_1}}\cdots\frac{\partial\chi_{j_p}}{\partial\varphi_{i_p}} + $$
$$+ \sum_{p=0}^{k} \sum_{1\le i_1,\dots,i_p\le N} \sum_{\substack{1\le j_1,\dots j_p\le k \\ j_1+\dots+j_p=k}} \frac{1}{p!}\frac{\partial^p f(y,\varphi)}{\partial I_{i_1}\dots\partial I_{i_p}}\frac{\partial\chi_{j_1}}{\partial\varphi_{i_1}}\cdots\frac{\partial\chi_{j_p}}{\partial\varphi_{i_p}}$$

Sia $\xi_j \equiv \xi - j\delta$, $j = 1,\dots,k$. Affermo che:

$$|\Gamma_j|_{\xi_{j-1},\frac{\rho}{2}} \le \frac{M_j}{\varepsilon_0^{j-1}} \tag{D.1}$$

con $M_1 \equiv \alpha$, e

$$M_j \equiv \alpha + \frac{\beta}{j}\sum_{i=1}^{j-1} M_i$$

Infatti, per induzione: supponendo (D.1) vera per Γ_j, usando il Lemma D.2 e il fatto che per $F \in \mathrm{C}^\omega(\mathbf{T}^N_\sigma)$ è $|\hat{F}_n|_\sigma \le |F|_\sigma e^{-|n|\sigma}$, ho:

$$\left|\frac{\partial\chi_j}{\partial\varphi_l}\right|_{\xi_j,\frac{\rho_0}{2}} = \left|\sum_{\substack{n\in\mathbf{Z}^N \\ 0<|n|\le jP}} \frac{(\hat{\Gamma}_j)_n}{\omega\cdot n} n_l e^{in\cdot\varphi}\right|_{\xi_j,\rho_0} \le \sum_{\substack{n\in\mathbf{Z}^N \\ 0<|n|\le jP}} \frac{|(\hat{\Gamma}_j)_n|_{\xi_j,\frac{\rho_0}{2}}}{\gamma}|n|\, e^{|n|\xi_j} \le$$
$$\le \sum_{\substack{n\in\mathbf{Z}^N \\ 0<|n|\le jP}} \frac{|(\hat{\Gamma}_j)_n|_{\xi_{j-1},\frac{\rho_0}{2}}}{\gamma}|n|\, e^{|n|\xi_j} \le$$
$$\le \sum_{\substack{n\in\mathbf{Z}^N \\ 0<|n|\le jP}} \frac{|\Gamma_j|_{\xi_{j-1},\frac{\rho_0}{2}} \cdot e^{-|n|\xi_{j-1}}}{\gamma}|n|\, e^{|n|\xi_j} \le$$
$$\le \sum_{\substack{n\in\mathbf{Z}^N \\ 0<|n|\le jP}} \frac{M_j}{\varepsilon_0^{j-1}}\frac{1}{\gamma}|n|\, e^{-|n|\delta} \le \frac{2^N e^{N+1} N}{\delta^{N+1}} \cdot \frac{M_j}{\varepsilon_0^{j-1}\gamma} \tag{D.2}$$

da cui, utilizzando anche il Lemma D.3

$$|y + \sum_{s=1}^{j}\varepsilon^s\partial_\varphi\chi_s - I_0|_{\xi_j,\frac{\rho_0}{2}} \le \frac{\rho_0}{2} + \sum_{s=1}^{j}\varepsilon_0^s|\partial_\varphi\chi_s|_{\xi_j,\frac{\rho_0}{2}} \le$$

$$\leq \frac{\rho_0}{2} + \sum_{s=1}^{j} \varepsilon_0^s N \cdot \frac{2^N e^{N+1} N}{\delta^{N+1}} \cdot \frac{M_s}{\varepsilon_0^{s-1}\gamma} \leq$$

$$\leq \frac{\rho_0}{2} + \varepsilon_0 k \cdot \frac{2^N e^{N+1} N^2}{\delta^{N+1}\gamma} \cdot \alpha e^{k\beta} \leq \rho_0 \tag{D.3}$$

Ora, ponendo

$$D^m \equiv \left.\frac{d^m}{d\varepsilon^m}\right|_{\varepsilon=0}$$

grazie a (D.2) e a (D.3) e invocando la **Stima di Cauchy**[4] posso fare il passo induttivo:

$$\begin{aligned}
|\Gamma_{j+1}|_{\xi_j,\frac{\rho_0}{2}} &\leq \Bigg| \frac{1}{(j+1)!} D^{j+1} h(y + \sum_{s=1}^{j} \varepsilon^s \partial_\varphi \chi_s) + \\
&+ \frac{1}{j!} D^j f(y + \sum_{s=1}^{j} \varepsilon^s \partial_\varphi \chi_s, \varphi) \Bigg|_{\xi_j,\frac{\rho_0}{2}} = \\
&= \Bigg| \frac{1}{(j+1)!} D^j \frac{d}{d\varepsilon} h(y + \sum_{s=1}^{j} \varepsilon^s \partial_\varphi \chi_s) + \\
&+ \frac{1}{j!} D^j f(y + \sum_{s=1}^{j} \varepsilon^s \partial_\varphi \chi_s, \varphi) \Bigg|_{\xi_j,\frac{\rho_0}{2}} = \\
&= \Bigg| \frac{1}{(j+1)!} D^j (h'(y + \sum_{s=1}^{j} \varepsilon^s \partial_\varphi \chi_s) \cdot \sum_{s=1}^{j} s\varepsilon^{s-1} \partial_\varphi \chi_s) + \\
&+ \frac{1}{j!} D^j f(y + \sum_{s=1}^{j} \varepsilon^s \partial_\varphi \chi_s, \varphi) \Bigg|_{\xi_j,\frac{\rho_0}{2}} = \\
&= \frac{1}{j!} \Bigg| D^j [\frac{1}{j+1} (h'(y + \sum_{s=1}^{j} \varepsilon^s \partial_\varphi \chi_s) \cdot \sum_{s=1}^{j} s\varepsilon^{s-1} \partial_\varphi \chi_s) +
\end{aligned}$$

[4]Se $\Omega' \subset \Omega \subset \mathbf{C}^d$ limitati e a frontiera liscia e $F \in \mathrm{C}^\omega(\mathbf{T}^N_\sigma)$

$$\sup_{\Omega'} |\partial^m F| \leq \frac{m! \sup_\Omega |F|}{\mathrm{dist}(\Omega, \Omega')^m}$$

Qui uso questo risultato con $\Omega = \{\varepsilon \in \mathbf{C} \text{ tc } |\varepsilon| \leq \varepsilon_0\}$ e $\Omega' = \{0\}$.

$$
\begin{aligned}
+ \quad & f(y+\sum_{s=1}^{j}\varepsilon^s\partial_\varphi\chi_s,\varphi)]\Bigg|_{\xi_j,\frac{\rho_0}{2}} \leq \\
\leq \quad & \frac{1}{\varepsilon_0^j}\Bigg|\frac{1}{j+1}(h'(y+\sum_{s=1}^{j}\varepsilon^s\partial_\varphi\chi_s)\cdot\sum_{s=1}^{j}s\varepsilon^{s-1}\partial_\varphi\chi_s)+ \\
+ \quad & f(y+\sum_{s=1}^{j}\varepsilon^s\partial_\varphi\chi_s,\varphi)\Bigg|_{\xi_j,\frac{\rho_0}{2}} \leq \\
\leq \quad & \frac{1}{\varepsilon_0^j}\left[\frac{|h'|_{\xi,\rho_0}\,k}{j+1}\cdot\sum_{s=1}^{j}\varepsilon_0^{s-1}\frac{2^Ne^{N+1}N^2}{\delta^{N+1}}\cdot\frac{M_s}{\varepsilon_0^{s-1}\gamma}+|f|_{\xi,\rho_0}\right] \leq \\
\leq \quad & \frac{1}{\varepsilon_0^j}[\frac{\beta}{j+1}\cdot\sum_{s=1}^{j}M_s+\alpha] = \frac{M_{j+1}}{\varepsilon_0}
\end{aligned}
$$

che dimostra la (D.1), e di conseguenza anche la (D.2) e la (D.3)!

Da tutto questo, definendo $\Upsilon \equiv 2^{N+1}e^{N+1}N^2\alpha e^{k\beta}\delta^{-N-1}\gamma^{-1}\varepsilon_0 \leq \rho_0 k^{-1}$, e richiamandosi al Lemma D.1, si ottiene la stima sul resto:

$$
\begin{aligned}
|R_k|_{\frac{\xi}{2},\frac{\rho_0}{2}} \leq \quad & \sum_{p=0}^{k+1}\sum_{1\leq i_1,\ldots,i_p\leq N}\sum_{\substack{1\leq j_1,\ldots j_p\leq k\\ j_1+\ldots+j_p=k+1}}\frac{W}{p!}\left(\frac{2^Ne^{N+1}N\alpha e^{k\beta}\varepsilon_0}{\delta^{N+1}\gamma}\right)^p\frac{1}{\varepsilon_0^{j_1+\ldots+j_p}}+ \\
+ \quad & \sum_{p=0}^{k}\sum_{1\leq i_1,\ldots,i_p\leq N}\sum_{\substack{1\leq j_1,\ldots j_p\leq k\\ j_1+\ldots+j_p=k}}\frac{W}{p!}\left(\frac{2^Ne^{N+1}N\alpha e^{k\beta}\varepsilon_0}{\delta^{N+1}\gamma}\right)^p\frac{1}{\varepsilon_0^{j_1+\ldots+j_p}} = \\
= \quad & \sum_{p=0}^{k+1}\sum_{\substack{1\leq j_1,\ldots j_p\leq k\\ j_1+\ldots+j_p=k+1}}\frac{W}{p!}\left(\frac{2^Ne^{N+1}N^2\alpha e^{k\beta}\varepsilon_0}{\delta^{N+1}\gamma}\right)^p\frac{1}{\varepsilon_0^{k+1}}+ \\
+ \quad & \sum_{p=0}^{k}\sum_{\substack{1\leq j_1,\ldots j_p\leq k\\ j_1+\ldots+j_p=k}}\frac{W}{p!}\left(\frac{2^Ne^{N+1}N^2\alpha e^{k\beta}\varepsilon_0}{\delta^{N+1}\gamma}\right)^p\frac{1}{\varepsilon_0^{k}} \leq \\
\leq \quad & \frac{W}{\varepsilon_0^{k+1}}\cdot 2^{k+1}\sum_{p=0}^{k+1}\frac{\Upsilon^p}{p!}+\frac{W}{\varepsilon_0^k}\cdot 2^k\sum_{p=0}^{k}\frac{\Upsilon^p}{p!} \leq \\
& \leq \frac{W\,2^{k+1}e^{\Upsilon}}{\varepsilon_0^{k+1}}+\frac{W\,2^ke^{\Upsilon}}{\varepsilon_0^k} \leq \frac{W\,2^{k+2}e^{\Upsilon}}{\varepsilon_0^{k+1}}
\end{aligned}
$$

□

Questa stima ha il pregio di essere un calcolo diretto; purtroppo ε_0 tende a zero molto rapidamente al crescere di k, anche trascurando il problema dei piccoli denominatori: $\varepsilon_0 \sim e^{-k^c}$, essendo c una costante dimensionale.

E Stima del resto nel teorema della media di Birkhoff (II) e un modello senza piccoli denominatori con serie di Birkhoff divergente

Per migliorare la stima fatta nelle pagine precedenti farò uso della **teoria dei maggioranti**[1]:

Definizione E.1 *Siano*

$$a(x,\varphi) = \sum_{\substack{n\in\mathbf{Z}^N\\ k\in\mathbf{N}^N}} a_{k,n} x^k e^{in\cdot\varphi} \tag{E.1}$$

$$b(x,\varphi) = \sum_{\substack{n\in\mathbf{Z}^N\\ k\in\mathbf{N}^N}} b_{k,n} x^k e^{in\cdot\varphi} \tag{E.2}$$

Dico che b maggiora a (in simboli $a \prec b$) se $|a_{k,n}| \le b_{k,n}$, $\forall k, n$.

Poniamo, se a è come nella (E.1):

$$\overline{a}(x,\varphi) \equiv \sum_{\substack{n\in\mathbf{Z}^N\\ k\in\mathbf{N}^N}} |a_{k,n}| x^k e^{in\cdot\varphi} \tag{E.3}$$

Continuerò a usare le notazioni definite nelle pagine precedenti e nel Teorema della media per γ, χ_j, Γ_j, P, ecc...

Lemma E.2

$$\max_{0\le k\le n} k!\cdot(n-k)! = n!$$

DIM. Induione su n:

$$\max_{0\le k\le n} k!\cdot(n-k)! = \max\{n!, \max_{0\le k\le n-1} k!\cdot(n-k)!\} = n! \tag{E.4}$$

in quanto, $\forall 0 \le k \le n-1$:

$$\begin{aligned} k!\cdot(n-k)! &\le n\cdot k!\cdot(n-k-1)! \le \\ &\le n\cdot \max_{0\le k\le n-1} k!\cdot(n-k-1)! \le n\cdot(n-1)! = n! \end{aligned}$$

avendo usato l'ipotesi induttiva. □

[1]Cfr. [FJ], [SM].

Lemma E.3

$$\max\{j_1! \cdot \ldots \cdot j_p!,\ j_1, \ldots, j_p \in \mathbf{N},\ j_1 + \ldots + j_p = n\} = n!$$

DIM. Per induzione su p:

$$\begin{aligned}
\max_{j_1+\ldots+j_p=n} j_1! \cdot \ldots \cdot j_p! &= \max_k k! \max_{j_1+\ldots+j_{p-1}=n-k} j_1! \cdot \ldots \cdot j_{p-1}! = \\
&= \max_k k! \cdot (n-k)! = n!
\end{aligned}$$

Dove ho utilizzato l'ipotesi induttiva e il Lemma precedente. $\square$

Lemma E.4 $\forall r \geq 2$, $$\max_{1 \leq s \leq r-1} (r-s)! \cdot s! = (r-1)!$$

DIM. Mostro il segno "$\leq$" per induzione su r:

$$\begin{aligned}
\max_{1\leq s\leq r-1} (r-s)! \cdot s! &= \max\{(r-1)!, \max_{1\leq s\leq r-2} (r-s)! \cdot s!\} = \\
&= \max\{(r-1)!, \max_{1\leq s\leq r-2} (r-s) \cdot (r-1-s)! \cdot s!\} \leq \\
&\leq \max\{(r-1)!, (r-1) \cdot \max_{1\leq s\leq r-2} (r-1-s)! \cdot s!\} \leq \\
&\leq \max\{(r-1)!, (r-1) \cdot (r-2)!\} = (r-1)!
\end{aligned}$$

Quanto al segno "$\geq$": $\max_{1\leq s\leq r-1} (r-s)! \cdot s! \leq (r-1)! \cdot 1! = (r-1)!$. $\square$

Lemma E.5 $\forall r \geq 2$, $$\max_{\substack{1\leq j_1,\ldots,j_p\leq r-1 \\ j_1+\ldots+j_p=r \\ p\in\mathbf{N}}} j_1! \cdot \ldots \cdot j_p! = (r-1)!$$

DIM. Scegliendo $p = 2$, $j_1 = r-1$ e $j_2 = 1$ si ottiene il segno "$\geq$". Quanto al segno "$\leq$":

$$\begin{aligned}
\max_{\substack{1\leq j_1,\ldots,j_p\leq r-1 \\ j_1+\ldots+j_p=r}} j_1! \cdot \ldots \cdot j_p! &= \max_{1\leq s\leq r-1} (s! \cdot \max_{\substack{1\leq j_1,\ldots,j_{p-1}\leq r-1 \\ j_1+\ldots+j_{p-1}=r-s}} j_1! \cdot \ldots \cdot j_{p-1}!) \leq \\
&\leq \max_{1\leq s\leq r-1} (s! \cdot \max_{j_1+\ldots+j_{p-1}=r-s} j_1! \cdot \ldots \cdot j_{p-1}!) \leq \\
&\leq \max_{1\leq s\leq r-1} s! \cdot (r-s)! = (r-1)!
\end{aligned}$$

avendo usato i Lemmi E.3 e E.4. $\square$

Lemma E.6 $c_j \in \mathbf{R}$, $v_j \in \mathbf{R}^N$

$$|[f(\sum_{j=1}^{r-1} \varepsilon^j c_j v_j)]_n| \leq \max_{\substack{1\leq j_1,\ldots,j_p\leq r-1 \\ j_1+\ldots+j_p=n \\ 1\leq p\leq r-1}} |c_{j_1}\ldots c_{j_p}| \, |[f(\sum_{j=1}^{r-1} \varepsilon^j v_j)]_n|$$

DIM. Sviluppando le potenze di ε:

$$f(\sum_{j=1}^{r-1} \varepsilon^j c_j v_j) = \sum_{p=0}^{r-1} \sum_{1\leq j_1,\ldots,j_p\leq r-1} \frac{\partial^p f(0)}{p!} \varepsilon^{j_1+\ldots+j_p} c_{j_1}\ldots c_{j_p} v_{j_1}\ldots v_{j_p}$$

perciò:

$$|[f(\sum_{j=1}^{r-1} \varepsilon^j c_j v_j)]_n| = |\sum_{p=0}^{r-1} \sum_{\substack{1\leq j_1,\ldots,j_p\leq r-1 \\ j_1+\ldots+j_p=n}} \frac{\partial^p f(0)}{p!} c_{j_1}\ldots c_{j_p} v_{j_1}\ldots v_{j_p}| \leq$$

$$\leq \max_{\substack{1\leq j_1,\ldots,j_p\leq r-1 \\ j_1+\ldots+j_p=n \\ 1\leq p\leq r-1}} |c_{j_1}\ldots c_{j_p}| \, |\sum_{p=0}^{r-1} \sum_{\substack{1\leq j_1,\ldots,j_p\leq r-1 \\ j_1+\ldots+j_p=n}} \frac{\partial^p f(0)}{p!} v_{j_1}\ldots v_{j_p}| \qquad \square$$

Lemma E.7 (Problema maggiorante) *Sia* $\mathcal{E} \equiv \{\varepsilon \in \mathbf{C} \ \text{ tc } \ |\varepsilon| \leq \varepsilon_0\}$. *Sia* y *fissato,* $|y - I_0| \leq \frac{\rho_0}{2}$ *e* $|z| \leq \frac{\rho_0}{2}$. *Siano*[2]

$$Q(z) \equiv h(y+z) - h(y) - h'(y)\cdot z$$

$$F(z,\varphi) \equiv f(y+z,\varphi)$$

Allora $\exists! \Psi = \Psi(\varphi,\varepsilon) \in \mathrm{C}^\omega(\mathbf{T}^N_\xi \times \mathcal{E})$ *tale che* $\Psi(\varphi,0) = 0$ *e*

$$\gamma\Psi - \overline{Q}(\vec{\Psi}) - \varepsilon\overline{F}(\vec{\Psi},\varphi) = 0 \tag{E.5}$$

avendo denotato

$$\vec{\Psi} = (\underbrace{\Psi,\ldots,\Psi}_{N \text{ volte}})$$

[2]Notare che $Q(0) = \overline{Q}(0) = Q'(0) = \overline{Q}'(0) = 0$.

purchè $\varepsilon \in \mathcal{E}$ e ε_0 verifichi le seguenti[3]

$$\sum_{j=1}^{k} \varepsilon_0^j \sup_{\varphi \in \mathbf{T}^n} |\frac{\partial^2 \chi_j(y_0,\varphi)}{\partial y \partial \varphi}| < 1 \tag{E.6}$$

$$\varepsilon_0 \leq \min\{\frac{\gamma R}{2|\overline{F}(0,\varphi)|_\omega}, \frac{\gamma}{4 \sup\limits_{\substack{|g|_\omega \leq R \\ \varphi \in \mathbf{T}_\xi^N}} |\partial_z \overline{F}(\vec{g},\varphi)|_{\mathcal{L}(\mathrm{C}^\omega(\mathbf{T}_\xi^N \times \mathcal{E}) \times \mathbf{T}_\xi^N, \mathbf{R})}}\} \tag{E.7}$$

avendo fissato $R > 0$ in modo[4] *che*

$$R \leq \sqrt{N} \frac{\rho_0}{2} \tag{E.8}$$

$$\sup_{\substack{|g|_\omega \leq R \\ \varphi \in \mathbf{T}_\xi^N}} |\overline{Q}'(\vec{g})|_{\mathcal{L}(\mathrm{C}^\omega(\mathbf{T}_\xi^N \times \mathcal{E}), \mathbf{R})} \leq \frac{\gamma}{4} \tag{E.9}$$

DIM. Questa dimostrazione è essenzialmente un Teorema del Dini in spazi di Banach. Sia $E \equiv \{u \in \mathrm{C}^\omega(\mathbf{T}_\xi^N \times \mathcal{E}) \text{ tc } |u|_\omega \leq R\}$. Sia, $\forall u \in E$,

$$\mathcal{F}[u](\varphi,\varepsilon) \equiv \gamma^{-1}\overline{Q}(\vec{u}(\varphi,\varepsilon)) + \gamma^{-1}\varepsilon \overline{F}(\vec{u}(\varphi,\varepsilon),\varphi) \tag{E.10}$$

Allora, $\forall u, v \in E$,

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}[u] - \mathcal{F}[v]|_\omega \leq \gamma^{-1} \Bigg(& \sup_{s \in [0,1]} |\overline{Q}'(s\vec{u}(\varphi,\varepsilon) + (1-s)\vec{v}(\varphi,\varepsilon))|_{\mathcal{L}(\mathrm{C}^\omega(\mathbf{T}_\xi^N \times \mathcal{E}),\mathbf{R})} + \\ & + \varepsilon_0 \sup_{s \in [0,1]} |\partial_z \overline{F}(s\vec{u}(\varphi,\varepsilon) + (1-s)\vec{v}(\varphi,\varepsilon),\varphi)|_{\mathcal{L}(\mathrm{C}^\omega(\mathbf{T}_\xi^N \times \mathcal{E}) \times \mathbf{T}_\xi^N, \mathbf{R})} \Bigg) \cdot \\ & \cdot |u-v|_\omega \leq \frac{1}{2}|u-v|_\omega \end{aligned} \tag{E.11}$$

[3]La (E.6) serve solo per poter applicare il Teorema della media.

[4]La condizione (E.8) serve per non uscire dal dominio di analiticità: se $z = \vec{g}(\varphi,\varepsilon)$

$$|z| \leq \sqrt{N}\,|z|_\infty \leq \sqrt{N}\,|g|_\omega \leq \frac{\rho_0}{2}$$

da cui in particolare, $\forall u \in E$

$$|\mathcal{F}[u]|_\omega \leq |\mathcal{F}[u] - \mathcal{F}[0]|_\omega + |\mathcal{F}[0]|_\omega \leq \frac{1}{2}R + \varepsilon_0 \gamma^{-1} |\overline{F}(0,\varphi)|_\omega \leq R \qquad \text{(E.12)}$$

La (E.12) mostra che $\mathcal{F} : E \longrightarrow E$; la (E.11) che $\mathcal{F}$ è una contrazione. La tesi segue dall'esistenza e unicità di punto fisso per $\mathcal{F}$. □

Notiamo che, con il Teorema di Cauchy:

$$\left|\frac{\partial \Psi_j}{\partial \varphi_i}\right|_{\frac{\xi}{2}} \leq \frac{4\,|\Psi_j|_\xi}{\xi} \leq \frac{4 \sup\limits_{\varphi \in \mathbf{T}^N_\xi, \varepsilon \in \mathcal{E}} |\Psi|}{\xi\, \varepsilon_0^j} \leq \frac{4\,|\Psi|_\omega}{\xi\, \varepsilon_0^j} \leq \frac{4R}{\xi\, \varepsilon_0^j}$$

utilizzerò ciò nel successivo Teorema E.9

Proposizione E.8 *Essendo, con le notazioni del Lemma precedente,* $\Psi = \sum_{j \geq 1} \varepsilon^j \Psi_j(\varphi)$ *lo sviluppo in* ε *di* Ψ*, si ha*

$$\chi_j \prec P^{2(j-1)}\,(j-1)!\;\Psi_j$$

DIM. Sostituendo lo sviluppo in ε di Ψ nella (E.5) si ottiene

$$\gamma \sum_{j \geq 1} \varepsilon^j \Psi_j - \overline{Q}(\sum_{j \geq 1} \varepsilon^j \vec{\Psi}_j) - \varepsilon \overline{F}(\sum_{j \geq 1} \varepsilon^j \vec{\Psi}_j, \varphi) = 0 \qquad \text{(E.13)}$$

Prendendo l'ordine 1 in ε della (E.13):

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma \Psi_1 - \sum_{i=0}^{N} \frac{\partial \overline{Q}}{\partial z_i}(0) \cdot \Psi_1 - \overline{F}(0,\varphi) = \\ &= \gamma \Psi_1 - \overline{f}(y,\varphi) \end{aligned}$$

cioè, ricordando chi è χ_1:

$$\Psi_1 = \frac{1}{\gamma}\overline{f} \succ \chi_1 \qquad \text{(E.14)}$$

Poi per induzione, prendendo l'ordine r di (E.13) e procedendo come nel Teorema della media:

$$\Psi_r = \frac{1}{\gamma}\{[\overline{Q}(\sum_{j=1}^{r-1} \varepsilon^j \vec{\Psi}_j)]_r + [\overline{F}(\sum_{j=1}^{r-1} \varepsilon^j \vec{\Psi}_j, \varphi)]_{r-1}\} \qquad \text{(E.15)}$$

Per cui, utilizzando l'ipotesi induttiva, i Lemmi E.3, E.5 e E.6, la definizione di χ_r e il fatto che $\partial_{\varphi_i}\chi_j \prec jP\chi_j$:

$$
\begin{aligned}
\chi_r &= \sum_{\substack{n\in\mathbf{Z}^N\\ m\in\mathbf{N}^N\\ 0\le|n|\le rP}} \frac{i}{n\cdot\omega}([Q(\sum_{j=1}^{r-1}\varepsilon^j\frac{\partial\chi_j}{\partial\varphi})]_r+[F(\sum_{j=1}^{r-1}\varepsilon^j\frac{\partial\chi_j}{\partial\varphi},\varphi)]_{r-1})_{n,m}y^m e^{in\cdot\varphi} \prec \\
&\prec \frac{1}{\gamma}([\overline{Q}(\sum_{j=1}^{r-1}\varepsilon^j\frac{\partial\chi_j}{\partial\varphi})]_r+[\overline{F}(\sum_{j=1}^{r-1}\varepsilon^j\frac{\partial\chi_j}{\partial\varphi},\varphi)]_{r-1}) \prec \\
&\prec \frac{1}{\gamma}([\overline{Q}(\sum_{j=1}^{r-1}\varepsilon^j Pj\vec{\chi}_j)]_r+[\overline{F}(\sum_{j=1}^{r-1}\varepsilon^j Pj\vec{\chi}_j,\varphi)]_{r-1}) \prec \\
&\prec \frac{1}{\gamma}([Q(\sum_{j=1}^{r-1}\varepsilon^j P^{2j-1}j!\vec{\Psi}_j)]_r+[F(\sum_{j=1}^{r-1}\varepsilon^j P^{2j-1}j!\vec{\Psi}_j,\varphi)]_{r-1}) \le \\
&\le \frac{1}{\gamma}(P^{2(r-1)}\max_{\substack{1\le j_1,\dots,j_p\le r-1\\ j_1+\dots+j_p=r\\ 2\le p\le r-1}} j_1!\,\dots\,j_p![\overline{Q}(\sum_{j=1}^{r-1}\varepsilon^j\vec{\Psi}_j)]_r+ \\
&+ P^{2(r-1)-1}\max_{\substack{1\le j_1,\dots,j_p\le r-1\\ j_1+\dots+j_p=r-1\\ 1\le p\le r-1}} j_1!\,\dots\,j_p![\overline{F}(\sum_{j=1}^{r-1}\varepsilon^j\vec{\Psi}_j)]_{r-1}) \le \\
&\le \frac{1}{\gamma}P^{2(r-1)}(r-1)!\{[\overline{Q}(\sum_{j=1}^{r-1}\varepsilon^j\vec{\Psi}_j)]_r+[\overline{F}(\sum_{j=1}^{r-1}\varepsilon^j\vec{\Psi}_j,\varphi)]_{r-1}\} = \\
&= P^{2(r-1)}(r-1)!\Psi_r
\end{aligned}
$$

avendo osservato anche che

$$
\max_{\substack{1\le j_1,\dots,j_p\le r-1\\ j_1+\dots+j_p=r\\ 2\le p\le r-1}} P^{2j_1-1}\cdot\ldots\cdot P^{2j_p-1} = \max_{\substack{1\le j_1,\dots,j_p\le r-1\\ j_1+\dots+j_p=r\\ 2\le p\le r-1}} P^{2r-p} \le P^{2r-2} = P^{2(r-1)} \qquad \square
$$

La stima nella Proposizione E.8 fa pensare che la divergenza della serie formale $\sum\varepsilon^j\chi_j$ non sia dovuta esclusivamente ai piccoli denominatori γ: per la convergenza di tale serie infatti si dovrebbe avere alla peggio $|\chi_j|\sim c^j$, mentre io ho ottenuto $|\chi_j|\sim(j-1)!$.

Per capire che i piccoli denominatori possono non essere l'unica causa della divergenza di $\chi\equiv\sum\varepsilon^j\chi_j$, possiamo considerare **un modello "senza**

piccoli denominatori": consideriamo per semplicità la perturbazione di un oscillatore armonico unidimensionale

$$H(I,\varphi) = \omega \cdot I + \varepsilon f(I,\varphi) \tag{E.16}$$

con $I \in \mathbf{R}$, $\varphi \in \mathrm{S}^1$, $f(I,\varphi) = a(\varphi) - b(\varphi)\, I$, dove $a(\varphi)$ e $b(\varphi)$ sono polinomi trigonometrici. L'equazione di Hamilton–Jacobi assume in questo caso la forma

$$\omega \cdot \partial_\varphi \chi + \varepsilon f(y + \partial_\varphi \chi, \varphi) = 0 \tag{E.17}$$

Ricordando la definizione di χ_j si vede subito che l'effetto dell'operatore $\omega\cdot\partial_\varphi$ su χ_j è quello di "moltiplicare per un piccolo denominatore".

Un ragionevole modello senza piccoli denominatori consiste dunque nel forzare i piccoli denominatori a essere 1: sostituiamo perciò al problema (E.17) il seguente:

$$u + \varepsilon f(\partial_\varphi u, \varphi) = 0 \tag{E.18}$$

in cui bisogna determinare $u(I,\varphi;\varepsilon) = \sum_{j\geq 1} \varepsilon^j u_j(I,\varphi)$.

La soluzione formale del problema si ottiene prendendo "l'ordine j" della (E.18):

$$u_j = -[f(\sum_{l=1}^{j-1} \varepsilon^l \partial_\varphi u_l, \varphi)]_{j-1} \tag{E.19}$$

da cui, utilizzando l'espressione lineare di f:

$$u_1(\varphi) = -a(\varphi) \qquad u_j(\varphi) = b(\varphi)\, \partial_\varphi u_{j-1} \tag{E.20}$$

Con il seguente esempio intendo mostrare che:

- anche in questo problema senza piccoli denominatori può esserci divergenza della serie $\sum \varepsilon^j u_j$.
- la divergenza è fattoriale, in modo simile a quanto accade nella Proposizione E.8: $|u_j| \sim (j-1)!$.

Sia $a(\varphi) \equiv b(\varphi) \equiv e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = 2\cos\varphi$. Si dimostra per induzione, richiamandosi a (E.20), che la soluzione di (E.18) verifica:

$$u_j(\varphi) = \begin{cases} -i^{j-1} \displaystyle\sum_{l=0}^{(j-1)/2} c_l^{(j)} \left(e^{(j-2l)i\varphi} + e^{-(j-2l)i\varphi}\right) & \text{se } j \text{ dispari} \\ \\ -i^{j-1} \displaystyle\sum_{l=0}^{(j-2)/2} c_l^{(j)} \left(e^{(j-2l)i\varphi} - e^{-(j-2l)i\varphi}\right) & \text{se } j \text{ pari} \end{cases}$$

con $c_l^{(j)} > 0$ e $c_0^{(j)} = (j-1)!$.

Allora se j è dispari:

$$\frac{u_j(0)}{-i^{j-1}} = \sum_{l=0}^{(j-1)/2} 2c_l^{(j)} \geq 2c_0^{(j)} = 2(j-1)! \tag{E.21}$$

che fa vedere $|u_j(0)| \geq 2(j-1)!$.

Questo esempio mostra anche che l'equazione funzionale (E.18) non ammette soluzione analitica.

Procediamo ora alla stima del resto:

Teorema E.9 *Siano*

$$\gamma \equiv \min_{\substack{0<|n|\leq kP \\ |I-I_0|\leq\rho_0}} |h' \cdot n|$$

$$W \equiv \max\left\{ \max_{\substack{1\leq i_1,\ldots,i_p\leq N \\ 0\leq p\leq k+1}} \left|\frac{\partial^p H}{\partial I_{i_1}\ldots\partial I_{i_p}}\right|_{\frac{\rho_0}{2}}, \max_{\substack{1\leq i_1,\ldots,i_p\leq N \\ 0\leq p\leq k}} \left|\frac{\partial^p f}{\partial I_{i_1}\ldots\partial I_{i_p}}\right|_{\frac{\xi}{2},\frac{\rho_0}{2}} \right\}$$

si ha:

$$|R_k(y,\varphi;\varepsilon)|_{\frac{\xi}{2},\frac{\rho_0}{2}} \leq 2\,\frac{W(\sqrt{2}\,P)^{2(k+1)}}{\varepsilon_0^{k+1}}\,(k+1)!\, e^{\frac{8NR}{P^2\xi}}$$

purchè $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ *e* ε_0 *verifichi le seguenti*

$$\sum_{j=1}^{k} \varepsilon_0^j \sup_{\varphi\in\mathbf{T}^n} |\frac{\partial^2\chi_j(y_0,\varphi)}{\partial y\partial\varphi}| < 1 \tag{E.22}$$

$$\varepsilon_0 \leq \min\{\frac{\gamma R}{2|\overline{F}(0,\varphi)|_\omega}, \frac{\gamma}{4\sup\limits_{\substack{|g|_\omega\leq R \\ \varphi\in\mathbf{T}_\xi^N}} |\partial_z\overline{F}(\vec{g},\varphi)|_{\mathcal{L}(\mathrm{C}^\omega(\mathbf{T}_\xi^N\times\mathcal{E})\times\mathbf{T}_\xi^N,\mathbf{R})}}\} \tag{E.23}$$

avendo fissato $R > 0$ *in modo che*

$$R \leq \sqrt{N}\frac{\rho_0}{2} \tag{E.24}$$

$$\sup_{\substack{|g|_\omega\leq R \\ \varphi\in\mathbf{T}_\xi^N}} |\overline{Q}'(\vec{g})|_{\mathcal{L}(\mathrm{C}^\omega(\mathbf{T}_\xi^N\times\mathcal{E}),\mathbf{R})} \leq \frac{\gamma}{4} \tag{E.25}$$

Otteniamo quindi

$$\varepsilon_0 = O(\gamma^2) \quad \text{e} \quad |R_k| \le \frac{C^{(k+1)}\,(k+1)!}{\gamma^{2(k+1)}}$$

dove C è un'opportuna costante.

DIM. Ricordando l'espressione del resto di pagina 158, e usando anche il Lemma D.1:

$$
\begin{aligned}
|R_k(y,\varphi;\varepsilon)|_{\frac{\xi}{2},\frac{\rho_0}{2}} \le{}& \sum_{p=0}^{k+1} \sum_{1\le i_1,\ldots,i_p\le N} \sum_{\substack{1\le j_1,\ldots j_p\le k\\ j_1+\ldots+j_p=k+1}} \frac{W}{p!} \left|\frac{\partial\chi_{j_1}}{\partial\varphi_{i_1}}\right|_{\frac{\xi}{2},\frac{\rho_0}{2}} \cdots \left|\frac{\partial\chi_{j_p}}{\partial\varphi_{i_p}}\right|_{\frac{\xi}{2},\frac{\rho_0}{2}} + \\
+ & \sum_{p=0}^{k} \sum_{1\le i_1,\ldots,i_p\le N} \sum_{\substack{1\le j_1,\ldots j_p\le k\\ j_1+\ldots+j_p=k}} \frac{W}{p!} \left|\frac{\partial\chi_{j_1}}{\partial\varphi_{i_1}}\right|_{\frac{\xi}{2},\frac{\rho_0}{2}} \cdots \left|\frac{\partial\chi_{j_p}}{\partial\varphi_{i_p}}\right|_{\frac{\xi}{2},\frac{\rho_0}{2}} \le \\
\le & \sum_{p=0}^{k+1} \sum_{1\le i_1,\ldots,i_p\le N} \sum_{\substack{1\le j_1,\ldots j_p\le k\\ j_1+\ldots+j_p=k+1}} \frac{W}{p!} P^{2(j_1-1)} \ldots P^{2(j_p-1)} (j_1-1)! \ldots (j_p-1)! \cdot \\
\cdot & \left|\frac{\partial\Psi_{j_1}}{\partial\varphi_{i_1}}\right|_{\frac{\xi}{2}} \cdots \left|\frac{\partial\Psi_{j_p}}{\partial\varphi_{i_p}}\right|_{\frac{\xi}{2}} + \\
+ & \sum_{p=0}^{k} \sum_{1\le i_1,\ldots,i_p\le N} \sum_{\substack{1\le j_1,\ldots j_p\le k\\ j_1+\ldots+j_p=k}} \frac{W}{p!} P^{2(j_1-1)} \ldots P^{2(j_p-1)} (j_1-1)! \ldots (j_p-1)! \cdot \\
\cdot & \left|\frac{\partial\Psi_{j_1}}{\partial\varphi_{i_1}}\right|_{\frac{\xi}{2}} \cdots \left|\frac{\partial\Psi_{j_p}}{\partial\varphi_{i_p}}\right|_{\frac{\xi}{2}} \le \\
\le & \; W P^{2(k+1)} \sum_{p=0}^{k+1} \sum_{1\le i_1,\ldots,i_p\le N} \sum_{\substack{1\le j_1,\ldots j_p\le k\\ j_1+\ldots+j_p=k+1}} \frac{(k+1-p)!}{P^{2p}\,p!} \left(\frac{4R}{\xi}\right)^p \frac{1}{\varepsilon_0^{j_1+\ldots+j_p}} + \\
+ & \; W P^{2k} \sum_{p=0}^{k} \sum_{1\le i_1,\ldots,i_p\le N} \sum_{\substack{1\le j_1,\ldots j_p\le k\\ j_1+\ldots+j_p=k}} \frac{(k-p)!}{P^{2p}\,p!} \left(\frac{4R}{\xi}\right)^p \frac{1}{\varepsilon_0^{j_1+\ldots+j_p}} \le \\
\le & \; \frac{W P^{2(k+1)}}{\varepsilon_0^{k+1}} \sum_{p=0}^{k+1} \frac{N^p\, 2^{p+k+1}}{P^{2p}\,p!} (k+1-p)! \left(\frac{4R}{\xi}\right)^p + \\
+ & \; \frac{W P^{2k}}{\varepsilon_0^{k}} \sum_{p=0}^{k} \frac{N^p\, 2^{p+k}}{P^{2p}\,p!} (k-p)! \left(\frac{4R}{\xi}\right)^p \le
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{W(\sqrt{2}\,P)^{2(k+1)}}{\varepsilon_0^{k+1}}(k+1)!\sum_{p=0}^{k+1}\frac{\Xi^p}{p!}+\frac{W(\sqrt{2}\,P)^{2k}}{\varepsilon_0^{k}}k!\sum_{p=0}^{k}\frac{\Xi^p}{p!}\leq\\
&\leq 2\,\frac{W(\sqrt{2}\,P)^{2(k+1)}}{\varepsilon_0^{k+1}}\,(k+1)!\,e^{\Xi}
\end{aligned}
$$

con $\Xi \equiv \dfrac{8NR}{P^2\xi}$. $\square$

F Il toro coi baffi standard

Consideriamo il seguente esempio:

Definizione F.1 *Dato il sistema:*

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \lambda_i x_i & & i = 1, \ldots, N^+, \ \ \lambda_i > 0 \\ \dot{y}_j &= -\mu_j y_j & & j = 1, \ldots, N^-, \ \ \mu_j > 0 \\ \dot{\varphi} &= \omega & & \varphi \in \mathbf{T}^N, \ \omega \in \mathbf{R}^N \ \text{ razionalmente indipendente} \end{aligned}$$

Il **toro coi baffi standard** *è dato*[1] *da*

$$\mathcal{T} \equiv \{(x, y, \varphi) \in \mathbf{R}^{N^+ + N^-} \times \mathbf{T}^N, \ x = 0, \ y = 0\}$$

Lemma F.2 *Sia $\eta = (x^{(0)}, 0, \varphi^{(0)})$ un qualsiasi punto del baffo instabile W^u del toro standard, e sia $\mathcal{N}$ una varietà trasversa a W^u in η.*

Allora $\exists R, \bar{R} > 0$, $m \geq 0$ e una rappresentazione di $\mathcal{N}$ in coordinate locali

$$\mathcal{N} \cap B_R(\eta) = \{(x(r), y(r), \varphi(r)), \ r \in \mathbf{R}^{N^- + m}, \ |r| \leq \bar{R}\}$$

in modo che $(x(0), y(0), \varphi(0)) = \eta$ e

$$\det \frac{\partial y}{\partial(r_1, \ldots, r_{N^-})}(0) \neq 0$$

DIM. Per la trasversalità

$$\mathbf{R}^{N^+ + N^- + N} = T_\eta \mathcal{N} + T_\eta W^u = T_\eta \mathcal{N} + \{(x, 0, \varphi)\} \tag{F.1}$$

per cui $N^+ + N^- + N \leq \dim \mathcal{N} + N^+ + N$, cioè $\dim \mathcal{N} \geq N^-$.

Da ciò se esprimiamo $\mathcal{N}$ in coordinate locali vicino a η otteniamo

$$\mathcal{N} \cap B_R(\eta) = \{(x(r), y(r), \varphi(r)), \ r \in \mathbf{R}^{N^- + m}, \ |r| \leq \bar{R}\}$$

con $m \geq 0$.

Inoltre, dalla (F.1) abbiamo che $\forall y \in \mathbf{R}^{N^-}$, $\exists x \in \mathbf{R}^{N^+}, \varphi \in \mathbf{R}^N, v = (v_x, v_y, v_\varphi) \in T_\eta \mathcal{N}$ in modo che $(0, y, 0) = (v_x, v_y, v_\varphi) + (x, 0, \varphi)$, che implica $y = v_y$.

[1] In questo caso, i baffi sono $W^s = \{(0, y, \varphi)\}$, $W^u = \{(x, 0, \varphi)\}$.

Quindi $\forall y \in \mathbf{R}^{N^-}$ si può trovare una curva $\gamma(t) = (x(r(t)), y(r(t)), \varphi(r(t)))$ su $\mathcal{N} \cap B_R(\eta)$ con $\gamma(0) = \eta$ (che mostra $y(r(0)) = 0 = y(0)$, cioè r(0)=0) e

$$y = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} y(r(t)) = \frac{\partial y}{\partial r}(0) \cdot r'(0)$$

In particolare, $\forall y \in \mathbf{R}^{N^-}$, $\exists X \in \mathbf{R}^{N^-}$ tale che $\dfrac{\partial y}{\partial r}(0)\ X = y$, cioè il sistema lineare $\dfrac{\partial y}{\partial r}(0)\ X = y$ è compatibile $\forall y$. Ciò significa[2] che, $\forall y$,

$$\text{Ran}\left(\frac{\partial y}{\partial r}(0)\ \bigg|\ y\right) = \text{Ran}\,\frac{\partial y}{\partial r}(0)$$

ovvero $\forall y \in \mathbf{R}^{N^-}$,

$$y \in \text{ span}\,\{\frac{\partial y}{\partial r_1}(0), \ldots, \frac{\partial y}{\partial r_{N^-+m}}(0)\} \subseteq \mathbf{R}^{N^-}$$

cioè

$$\text{span}\,\{\frac{\partial y}{\partial r_1}(0), \ldots, \frac{\partial y}{\partial r_{N^-+m}}(0)\} = \mathbf{R}^{N^-}$$

Che mostra $\text{Ran}\,\dfrac{\partial y}{\partial r}(0) = N^-$, o equivalentemente, a meno di riordinare le colonne, $\det \dfrac{\partial y}{\partial r}(0) \neq 0$. $\square$

Userò ora le seguenti notazioni:

$$\begin{aligned}
B_{a,b}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\varphi}) &\equiv \{(x, y, \varphi) \in \mathbf{R}^{N^+ + N^-} \times \mathbf{T}^N \text{ tc} \\
&\quad\ |x - \bar{x}|_\infty \le a,\ |y - \bar{y}|_\infty \le a,\ |\varphi - \bar{\varphi}|_\infty \le b, \} \\
L &\equiv \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{N^+} \end{pmatrix} \\
M &\equiv \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_{N^-} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Osserviamo che il flusso standard si può cosí scrivere

$$\Phi^t\,(X, Y, \phi) = (e^{Lt}X, e^{-Mt}Y, \phi + \omega t) \tag{F.2}$$

[2] Vd. [S1], pag. 72.

Proposizione F.3 *Il toro coi baffi standard è un toro di transizione.*

Più precisamente, $\forall \xi = (0, y^{(1)}, \varphi^{(1)}) \in W^s$, $\eta = (x^{(0)}, 0, \varphi^{(0)}) \in W^u$, $\forall \mathcal{N}$ *trasversa a* W^u *in* η, $\forall 0 < r \leq \bar{r}$, $\exists t^\star, \rho, \bar{\rho} > 0$ *ed* $\exists \bar{\eta} \in \mathcal{N}$ *tali che*

$$\Phi^{t^\star}\left(B_{r,\bar{r}}(\xi)\right) \supseteq B_{\rho,\bar{\rho}}(\bar{\eta}) \tag{F.3}$$

DIM. Siano r e $\bar{r}$ fissati a piacere. Dal Lemma precedente, si può scrivere $\mathcal{N}$ in coordinate locali nelle vicinanze di η

$$\mathcal{N} = \left\{(x(u,v), y(u,v), \varphi(u,v)),\ u \in \mathbf{R}^{N^-},\ v \in \mathbf{R}^m,\ |(u,v)| \leq \bar{R}\right\}$$
$$(x(0), y(0), \varphi(0)) = \eta$$

(e posso certo assumere $\bar{R} \leq r/3$), in modo che $\det \dfrac{\partial y}{\partial u}(0) \neq 0$. Denoterò per brevità $x(u) \equiv x(u,0)$, $y(u) \equiv y(u,0)$, $\varphi(u) \equiv \varphi(u,0)$. Siano:

$$\begin{aligned}
A &\equiv \left(\frac{\partial y}{\partial u}(0)\right)^{-1} \\
c &\equiv \max\left\{\sup_{|u|\leq\bar{R},1\leq i\leq N^+}\left|\frac{\partial x_i}{\partial u}(u)\right|,\ \sup_{|u|\leq\bar{R},1\leq i\leq N}\left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial u}(u)\right|\right\} \\
R_0 &\equiv \min\left\{\bar{R},\ \frac{r}{3c},\ \frac{1}{2N^-\sqrt{N^-}\ |A|\ \sup_{|u|\leq\bar{R}}\left|\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\right|_\infty}\right\} \\
T_0 &\equiv \max\left\{\frac{1}{\min\lambda_i}\log\frac{3|x^{(0)}|_\infty}{r},\ \frac{1}{\min\mu_i}\log\frac{2|y^{(1)}|_\infty\ |A|}{R_0}\right\} \\
\bar{\rho} &\equiv \frac{\bar{r}}{3}
\end{aligned}$$

Per la razionale indipendenza di ω, inoltre, si può trovare un $t^\star \geq T_0$ tale che $|\varphi^{(0)} - \varphi^{(1)} - \omega t^\star|_\infty < \bar{r}/3$. Sia allora

$$\rho \equiv \min\left\{\frac{r}{3},\ r\, e^{-\max\mu_i t^\star}\right\}$$

Poniamo dunque:

$$\mathcal{C}(u) \equiv u - A\left(y(u) - e^{-Mt^\star}y^{(1)}\right) \qquad\qquad \forall u \in \mathbf{R}^{N^-}, |u| \leq R_0$$

Si ha, $\forall |u|, |\tilde{u}| \leq R_0$:

$$|\mathcal{C}(u) - \mathcal{C}(\tilde{u})| \leq \sup_{|w|\leq R_0}\left|\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial u}(w)\right|\ |u - \tilde{u}| =$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{|w|\le R_0}\left|I_{N^-} - A\frac{\partial y}{\partial u}(w)\right|\ |u-\tilde u| = \\
&= |A|\sup_{|w|\le R_0}\left|\frac{\partial y}{\partial u}(0) - \frac{\partial y}{\partial u}(w)\right|\ |u-\tilde u| \le \\
&\le N^-\,|A|\sup_{|w|\le R_0}\sup_{1\le i,j\le N^-}\left|\frac{\partial y_i}{\partial u_j}(0) - \frac{\partial y_i}{\partial u_j}(w)\right|\ |u-\tilde u| \le \\
&\le N^-\,|A|\sup_{|w|,|z|\le R_0}\sup_{1\le i,j\le N^-}\left|\frac{\partial^2 y_i}{\partial u\partial u_j}(z)\right|\ |w|\ |u-\tilde u| \le \\
&\le N^-\sqrt{N^-}\,|A|\sup_{|z|\le R_0}\left|\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}(z)\right|_\infty\ R_0\ |u-\tilde u| \le \frac{1}{2}|u-\tilde u|
\end{aligned}
$$

e inoltre

$$
\begin{aligned}
\frac{R_0}{2} &\ge \frac{1}{2}|u| \ge |\mathcal{C}(u)-\mathcal{C}(0)| = |\mathcal{C}(u) - A\,e^{-Mt^\star}\,y^{(1)}| \ge \\
&\ge |\mathcal{C}(u)| - |A|\,e^{-\min\mu_i t^\star}\,|y^{(1)}| \ge |\mathcal{C}(u)| - \frac{R_0}{2}
\end{aligned}
$$

cioè $|\mathcal{C}(u)| \le R_0$.

Abbiamo quindi che $\mathcal{C}$ è una contrazione su $\{|u|\le R_0\}$: dall'esistenza di punto fisso, segue che $\exists\bar u$ tale che $e^{Mt^\star}y(\bar u) = y^{(1)}$.

Sia allora $\bar\eta = (\bar x,\bar y,\bar\varphi) \equiv (x(\bar u), y(\bar u), \varphi(\bar u))$. Si noti che

$$
|\bar x_i - x_i^{(0)}| = |x_i(\bar u) - x_i(0)| \le \sup_{|u|\le\bar R}\left|\frac{\partial x_i}{\partial u}(u)\right|\ |u| \le cR_0 \le \frac{r}{3}
$$

e allo stesso modo $|\bar\varphi_i - \varphi^{(0)}| \le r/3$.

Da tutto ciò si ottiene: $\forall|\rho_i'|\le\rho, |\bar\rho'|_\infty \le \bar\rho$

$$
|e^{-\lambda_i t^\star}(\bar x_i + \rho_i')| \le e^{-\min\lambda_i t^\star}|\bar x_i - x_i^{(0)}| + e^{-\min\lambda_i t^\star}|x_i^{(0)}| + \rho \le \frac{r}{3}+\frac{r}{3}+\frac{r}{3} = r \tag{F.4}
$$

$$
|e^{\mu_i t^\star}(\bar y_i + \rho_i') - y_i^{(1)}| \le |e^{\mu_i t^\star}\bar y_i - y_i^{(1)}| + e^{\max\mu_i t^\star}\rho = e^{\max\mu_i t^\star}\rho \le r \tag{F.5}
$$

$$
\begin{aligned}
|\bar\varphi + \bar\rho' - \omega t^\star - \varphi^{(1)}|_\infty &\le |\bar\varphi - \varphi^{(0)}|_\infty + |\varphi^{(0)} - \omega t^\star - \varphi^{(1)}|_\infty + \bar\rho \le \\
&\le \frac{\bar r}{3}+\frac{\bar r}{3}+\frac{\bar r}{3} = \bar r
\end{aligned} \tag{F.6}
$$

Dalle (F.2), (F.4), (F.5), (F.6) segue che

$$\Phi^{-t^\star}\left(B_{\rho,\bar\rho}(\bar\eta)\right) \subseteq B_{r,\bar r}(\xi) \qquad \square$$

Consideriamo ora una catena di transizione $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_n$ di tori standard a frequenze diofantine e sia η_i un punto dell'intersezione trasversa tra $\mathcal{T}_i$ e $\mathcal{T}_{i+1}$, $i = 1, \dots, n-1$.

Consideriamo carte locali di W^s_{i+1} nell'intorno di $\eta_i = (\bar x^{[i]}, \bar y^{[i]}, \bar\varphi^{[i]})$:

$$W_i^s = \{\left(x^{(i)}(u,v), y^{(i)}(u,v), \varphi^{(i)}(u,v)\right),\ u \in \mathbf{R}^{N^-},\ v \in \mathbf{R}^m,\ |(u,v)| \le \bar R^{(i)}\}$$
$$\left(x^{(i)}(0), y^{(i)}(0), \varphi^{(i)}(0)\right) = \eta_i;\ \ i = 2, \dots, n$$

(e, avendo fissato un qualsiasi $0 < r_1 < 1$, posso assumere $\bar R^{(i)} \le r_1/3$) con

$$\det \frac{\partial y^{(i)}}{\partial u}(0) \neq 0$$

Denotiamo inoltre $T(\mathcal{T}, \omega, \varepsilon)$ un tempo tale che $\forall x \in \mathcal{T}\ \exists 0 \le t \le T(\mathcal{T}, \omega, \varepsilon)$ che verifichi $|x - \omega t| < \varepsilon$.

Fissato $\eta_0 = (\bar x^{[0]}, \bar y^{[0]}, \bar\varphi^{[0]}) \in W_1^s$ con la dimostrazione della Proposizione F.3 si ha che ponendo

$$\begin{aligned}
\mu &\equiv \max_{1\le i\le n, 1\le j\le N} \mu_j^{(i)} \\
\lambda &\equiv \min_{1\le i\le n, 1\le j\le N} \lambda_j^{(i)} \\
\bar R &\equiv \min_{1\le i\le n} \bar R^{(i)} \\
A &\equiv \max_{1\le i\le n} \left| \left(\frac{\partial y^{(i)}}{\partial u}(0)\right)^{-1} \right| \\
c &\equiv \max_{1\le i\le n} \left\{ \sup_{|u|\le \bar R, 1\le j\le N} \left| \frac{\partial x_j^{(i)}}{\partial u}(u) \right|,\ \sup_{|u|\le \bar R, 1\le j\le N} \left| \frac{\partial \varphi_j^{(i)}}{\partial u}(u) \right| \right\} \\
R_0 &\equiv \min\left\{ \bar R,\ \frac{r_n}{3c},\ \frac{1}{2N\sqrt{N}\ A\ \max_{1\le i\le n} \sup_{|u|\le\bar R} \left|\frac{\partial^2 y^{(i)}}{\partial u^2}\right|_\infty} \right\} \\
T_i &\ge \max\left\{ \frac{1}{\lambda} \log \frac{3|x^{[i]}|_\infty}{r_i},\ \frac{1}{\mu} \log \frac{2|y^{[i-1]}|_\infty\ A}{R_0} \right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
T_i^\star &\equiv T_i + T(\mathcal{T}_i, \omega_i, \bar r_i/3)\\
\bar r_1 &\equiv r_1\\
\bar r_{i+1} &\equiv \frac{\bar r_i}{3}\\
r_{i+1} &\equiv \frac{r_i}{3}\, e^{-\mu T_i^\star}
\end{aligned}
$$

si ha[3] $\Phi^{t_i^\star}\,(B_{r_i,\bar r_i}(\eta_{i-1})) \supseteq B_{r_{i+1},\bar r_{i+1}}(\eta_i)$ per un opportuno $0 \le t_i^\star \le T_i^\star$.

Osserviamo che

$$\frac{2|y^{[i-1]}|_\infty\, A}{R_0} \le \frac{2\,|y^{[i-1]}|_\infty\, A}{R_0\, r_i}$$

per cui è conveniente porre

$$
\begin{aligned}
C &\equiv \max_{1\le i\le n}\{\frac{2\,|y^{[i-1]}|_\infty\, A}{R_0},\ 3|x^{[i]}|_\infty\}\\
D &\equiv \max\{\lambda^{-1}, \mu^{-1}\}
\end{aligned}
$$

e scegliere

$$T_i \equiv D\,\log\frac{C}{r_i}$$

per cui

$$T_i^\star = D\,\log\frac{C}{r_i} + T(\mathcal{T}_i, \omega_i, \bar r_i/3)$$

Il tempo di diffusione $T^\star \equiv T_1^\star + \ldots + T_n^\star$ è quindi tale che per un opportuno $0 \le t^\star \le T^\star$ si abbia $\Phi^{t^\star}\,(B_{r_1,\bar r_1}(\eta_0)) \supseteq B_{r_n,\bar r_n}(\eta_{n-1})$: entro questo lasso di tempo punti vicini a $\mathcal{T}_1$ sono giunti sulla varietà stabile di $\mathcal{T}_n$!

In effetti si può dimostrare[4] che, se ω è diofantina, $\exists a, b > 0$ tali che

$$T(\mathcal{T}, \omega, r/3) \le \frac{a}{r^b}$$

Otteniamo quindi

$$T_i^\star \le D\,\log\frac{C}{r_i} + \frac{a}{\bar r_i^b} \tag{F.7}$$

[3]Osservare che $r_i \le \bar r_i$, $\forall i = 1, \ldots, n$. Infatti, per induzione:

$$r_{i+1} = \frac{r_i}{3}\, e^{-\mu T_i^\star} \le \frac{r_i}{3} \le \frac{\bar r_i}{3} = \bar r_{i+1}$$

[4]Cfr. [MA96], pag. 232 e la referenza ivi segnalata.

Essendo per costruzione

$$\bar{r}_i = \frac{\bar{r}_1}{3^{i-1}} = \frac{r_1}{3^{i-1}} \qquad\qquad r_i = \frac{r_1}{3^{i-1}}\,\exp(-\mu \sum_{j=1}^{i-1} T_j^\star)$$

si ha in definitiva:

$$T_i^\star \leq D\,\log\frac{C}{r_1} + D(i-1)\,\log 3 + \mu D \sum_{j=1}^{i-1} T_j^\star + \frac{a}{r_1^b}\,3^{b(i-1)} \tag{F.8}$$

Proposizione F.4 (Tempo di diffusione standard) *Il tempo di diffusione per catene di transizione di tori standard a frequenze diofantine dipende esponenzialmente dalla lunghezza della catena: esistono due costanti $\kappa > 0$ e $K > 1$ tali che*

$$T^\star \leq \kappa\, K^n$$

DIM. Con riferimento alla (F.8), ponendo

$$\alpha \equiv D\,\log\frac{C}{r_1} \qquad\qquad \beta \equiv 2\max\{D\log 3,\, \frac{a}{r_1^b}\} \qquad\qquad \Delta \equiv 3^b$$

si ottiene (usando il fatto che $i-1 \leq \Delta^{i-1}\ \forall i \geq 1$):

$$T_i^\star \leq T_i^* \equiv \alpha + \frac{\beta}{2}\,(i-1) + \mu D \sum_{j=1}^{i-1} T_j^\star + \frac{\beta}{2}\,\Delta^{i-1} \leq \alpha + \beta\Delta^{i-1} + \mu D \sum_{j=1}^{i-1} T_j^* \tag{F.9}$$

ponendo quindi $\sigma \equiv \mu D$, $\tilde{\sigma} \equiv 1 + \sigma$, $\tilde{\beta} \equiv \beta(2 - 1/\Delta)$:

$$\begin{aligned}
T_i^* &\overset{(F.9)}{\leq} \alpha + \beta\Delta^{i-1} + \sigma \sum_{j=1}^{i-1} T_j^* = \\
&= \alpha + \beta\Delta^{i-2} + \sigma \sum_{j=1}^{i-2} T_j^* + \beta(\Delta^{i-1} - \Delta^{i-2}) + \sigma T_{i-1}^* \overset{(F.9)}{=} \\
&= T_{i-1}^* - \frac{\beta}{2}\,(i-2) - \frac{\beta}{2}\,\Delta^{i-2} + \beta\,\Delta^{i-2} + \beta(\Delta^{i-1} - \Delta^{i-2}) + \sigma T_{i-1}^* \leq \\
&\leq T_{i-1}^* + \beta\,\Delta^{i-1}\left(2 - \frac{1}{\Delta}\right) + \sigma T_{i-1}^* = \tilde{\sigma} T_{i-1}^* + \tilde{\beta}\,\Delta^{i-1} \qquad \text{(F.10)}
\end{aligned}$$

(avendo usato che $\frac{\beta}{2}\Delta^{i-2} - \frac{\beta}{2}(i-2) \leq \frac{\beta}{2}\Delta^{i-2} \leq \beta\,\Delta^{i-1}$).

Dico che $\forall 1 \leq r \leq i-1$ si ha

$$T_i^* \leq \tilde{\sigma}^r \, T_{i-r}^* + \tilde{\beta} \sum_{k=1}^{r} (\Delta^{i-k} \tilde{\sigma}^{k-1}) \tag{F.11}$$

infatti, per induzione su r: la (F.10) è la base dell'induzione; il passo induttivo è cosí:

$$\begin{aligned}
T_i^* \quad &\leq \quad \tilde{\sigma}^r \, T_{i-r}^* + \tilde{\beta} \sum_{k=1}^{r} (\Delta^{i-k} \tilde{\sigma}^{k-1}) \overset{\text{(F.10)}}{\leq} \\
&\leq \quad \tilde{\sigma}^r \left(\tilde{\sigma} T_{i-r-1}^* + \tilde{\beta} \, \Delta^{i-r-1} \right) + \tilde{\beta} \sum_{k=1}^{r} (\Delta^{i-k} \tilde{\sigma}^{k-1}) = \\
&= \quad \tilde{\sigma}^{r+1} \, T_{i-(r+1)}^* + \tilde{\beta} \sum_{k=1}^{r+1} (\Delta^{i-k} \tilde{\sigma}^{k-1})
\end{aligned} \tag{F.12}$$

La (F.11) per $r = i-1$ porta a

$$\begin{aligned}
T_i^* \quad &\leq \quad \tilde{\sigma}^{i-1} \, T_1^* + \tilde{\beta} \Delta^i \, \tilde{\sigma}^{-1} \sum_{k=1}^{i-1} (\Delta^{-1} \, \tilde{\sigma})^k = \\
&= \quad \tilde{\sigma}^{i-1} \, T_1^* + \frac{\tilde{\beta} \Delta^i}{\tilde{\sigma}} \, \frac{1 - \left(\frac{\tilde{\sigma}}{\Delta}\right)^i}{1 - \frac{\tilde{\sigma}}{\Delta}} = \\
&= \quad \tilde{\sigma}^{i-1} \, T_1^* + \frac{\tilde{\beta} \Delta}{\tilde{\sigma}} \, \frac{\Delta^i - \tilde{\sigma}^i}{\Delta - \tilde{\sigma}}
\end{aligned} \tag{F.13}$$

Ponendo $\tilde{K} \equiv \max\{\Delta, \tilde{\sigma}\}$ e

$$\kappa \equiv \tilde{K}^{-1} \, (\alpha + \beta/2) + \tilde{\beta} \Delta (\tilde{\sigma} \, |\Delta - \tilde{\sigma}|)^{-1}$$

si giunge a

$$\begin{aligned}
T_i^* \quad &\leq \quad \tilde{\sigma}^{i-1} \, T_1^* + \frac{\tilde{\beta} \Delta}{\tilde{\sigma}} \, \frac{\Delta^i - \tilde{\sigma}^i}{\Delta - \tilde{\sigma}} \leq \\
&\leq \quad \tilde{K}^{i-1} T_1^* + \frac{\tilde{\beta} \Delta}{\tilde{\sigma}} \, \frac{\tilde{K}^i - \min\{\Delta, \tilde{\sigma}\}^i}{|\Delta - \tilde{\sigma}|} \leq \\
&\leq \quad \tilde{K}^{i-1} T_1^* + \frac{\tilde{\beta} \Delta}{\tilde{\sigma}} \, \frac{\tilde{K}^i}{|\Delta - \tilde{\sigma}|} \overset{\text{(F.9)}}{=} \\
&= \quad \tilde{K}^i \left(\frac{\alpha + \beta/2}{\tilde{K}} + \frac{\tilde{\beta} \Delta}{\tilde{\sigma} \, |\Delta - \tilde{\sigma}|} \right) = \kappa \, \tilde{K}^i
\end{aligned}$$

Poniamo infine $K \equiv \tilde{K}^2$: poichè $\tilde{K} \geq \Delta = 3^b \geq 3$ mostra $n \leq \tilde{K}^n$, si ottiene:

$$T^\star \leq \sum_{i=1}^{n} T_i^* \leq \kappa \sum_{i=1}^{n} \tilde{K}^i \leq \kappa \sum_{i=1}^{n} \tilde{K}^n = \kappa n \tilde{K}^n \leq \kappa\, \tilde{K}^n\, \tilde{K}^n = \kappa\, K^n \qquad \square$$

Userò ora la seguente notazione: se $(I, \varphi, p, q) \in \mathbf{R}^{N-1} \times \mathbf{T}^{N-1} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{a,b}(\bar{I}, \bar{\varphi}, \bar{p}, \bar{q}) \;\; &\equiv \;\; \{(x, y, \varphi) \;\; \text{tc} \\ & \qquad |p - \bar{p}| \leq a, \; |q - \bar{q}| \leq a, \; |I - \bar{I}|_\infty \leq a, |\varphi - \bar{\varphi}|_\infty \leq b, \} \end{aligned}$$

La tecnica dimostrativa della Proposizione F.3 si può cosí estendere:

Proposizione F.5 *Consideriamo l'hamiltoniana*

$$h(I, pq) \qquad\qquad\qquad I \in \mathbf{R}^{N-1}, \varphi \in \mathbf{T}^{N-1}, p \in \mathbf{R}, q \in \mathbf{R}$$

Denotiamo $\xi \equiv pq$ *; supponiamo che* I_0 *sia tale che* $\partial_\xi h(I_0, \xi) > 0 \;\forall \xi$ *e che* $\partial_I h(I_0, 0)$ *sia un vettore diofantino. Allora il toro*

$$\mathcal{T}_{I_0} \equiv \{(I_0, \varphi, 0, 0), \varphi \in \mathbf{T}^{N-1}\}$$

è un toro di transizione.

Più precisamente,

$$\begin{aligned} \forall \zeta \;\; &= \;\; (I_0, \varphi_1, p_1, 0) \in W^s = \{(I_0, \varphi, p, 0), \varphi \in \mathbf{T}^{N-1}, p \in \mathbf{R}\} \\ \forall \eta \;\; &= \;\; (I_0, \varphi_0, 0, q_0) \in W^u = \{(I_0, \varphi, 0, q), \varphi \in \mathbf{T}^{N-1}, q \in \mathbf{R}\} \end{aligned}$$

$\forall \mathcal{N}$ *trasversa a* W^u *in* η, $\forall 0 < r \leq \bar{r} < 1$, $\exists t^\star, \rho, \bar{\rho} > 0$ *ed* $\exists \bar{\eta} \in \mathcal{N}$ *tali che*

$$\Phi^{t^\star}\left(\mathcal{B}_{r,\bar{r}}(\zeta)\right) \supseteq \mathcal{B}_{\rho,\bar{\rho}}(\bar{\eta}) \tag{F.14}$$

DIM. Siano r e $\bar{r}$ fissati a piacere. Dal Lemma F.2, si può scrivere $\mathcal{N}$ in coordinate locali nelle vicinanze di η

$$\begin{aligned} \mathcal{N} \;\; &= \;\; \{(I(u, v), \varphi(u, v), p(u, v), q(u, v)), \; u \in \mathbf{R}, \; v \in \mathbf{R}^m, \; |(u, v)| \leq \bar{R}\} \\ \eta \;\; &= \;\; (I(0), \varphi(0), p(0), q(0)) \end{aligned}$$

(e posso certo assumere $\bar{R} \leq r/3$), in modo che $\frac{\partial p}{\partial u}(0) \neq 0$. Denoterò per brevità $I(u) \equiv I(u, 0)$, $\varphi(u) \equiv \varphi(u, 0)$, $p(u) \equiv p(u, 0)$, $q(u) \equiv q(u, 0)$.

Poichè dalle equazioni di Hamilton si vede che $\dot{I} = 0$ e $\frac{d}{dt}(pq) = 0$, ponendo $\omega(I, \xi) \equiv \partial_I h(I, \xi)$, $\lambda(I, \xi) \equiv \partial_\xi h(I, \xi)$, l'evoluzione del moto è

$$
\begin{gathered}
I(t) = I(0) \quad \xi(t) = \xi(0) \quad \varphi(t) = \varphi(0) + \omega(I(0), \xi(0))t \\
p(t) = p(0)\, e^{-\lambda(I(0),\xi(0))} \quad q(t) = q(0)\, e^{\lambda(I(0),\xi(0))}
\end{gathered}
$$

Suppongo r abbastanza piccolo, in modo che

$$
\bar{\lambda} \equiv \min_{|I-I_0|_\infty \le \bar{r},\, |q-q_0| \le r,\, |p| \le r} \lambda(I, pq) > 0
$$

Denotiamo inoltre $T(\omega(I_0, 0), \varepsilon)$ un tempo tale che $\forall \varphi \in \mathbf{T}^{N-1}$ $\exists 0 \le t \le T(\omega(I_0, 0), \varepsilon)$ che verifichi $|\varphi - \omega t| < \varepsilon$; è noto[5] che, essendo $\omega(I_0, 0)$ diofantina, esistono due costanti $a, b > 1$ che controllano $T(\omega(I_0, 0), \varepsilon)$:

$$
T(\omega(I_0, 0), \varepsilon/6) \le \frac{a}{\varepsilon^b} \tag{F.15}
$$

Siano:

$$
\begin{aligned}
W &\equiv \left(\sup_{|I-I_0|_\infty \le r,\, |q-q_0| \le r,\, |p| \le r} \left| \frac{\partial \omega(I, pq)}{\partial \xi} \right| \sup_{|u| \le \bar{R}} \left| \frac{\partial \xi(u)}{\partial u} \right| + \right. \\
&\quad \left. + \sup_{|I-I_0|_\infty \le r,\, |q-q_0| \le r,\, |p| \le r} \left| \frac{\partial \omega(I, pq)}{\partial I} \right| \sup_{|u| \le \bar{R}} \left| \frac{\partial I(u)}{\partial u} \right| \right) \\
M &\equiv \left(\sup_{|I-I_0|_\infty \le r,\, |q-q_0| \le r,\, |p| \le r} \left| \frac{\partial \lambda(I, pq)}{\partial \xi} \right| \sup_{|u| \le \bar{R}} \left| \frac{\partial \xi(u)}{\partial u} \right| + \right. \\
&\quad \left. + \sup_{|I-I_0|_\infty \le r,\, |q-q_0| \le r,\, |p| \le r} \left| \frac{\partial \lambda(I, pq)}{\partial I} \right| \sup_{|u| \le \bar{R}} \left| \frac{\partial I(u)}{\partial u} \right| \right) \\
L &\equiv \max \left\{ 1, \sup_{|I-I_0|_\infty \le \bar{r},\, |q-q_0| \le r,\, |p| \le r} \lambda(I, pq) \right\} \\
C &\equiv \max \left\{ 3|q_0|,\, 2|p_1|\, |A|,\, \left(8|A|\, |p_1|\, \bar{\lambda}^{-1} M L \right)^2 \right\} \\
D &\equiv \max \left\{ \sup_{|I-I_0|_\infty \le \bar{r},\, |q-q_0| \le r,\, |p| \le r} \left| \frac{\partial \lambda}{\partial I} \right| + (2 + |q_0|) \sup_{|I-I_0|_\infty \le \bar{r},\, |q-q_0| \le r,\, |p| \le r} \left| \frac{\partial \lambda}{\partial \xi} \right|, \right. \\
&\quad \left. 4 \left(\sup_{|I-I_0|_\infty \le \bar{r},\, |q-q_0| \le r,\, |p| \le r} \left| \frac{\partial \omega}{\partial I} \right| + \sup_{|I-I_0|_\infty \le \bar{r},\, |q-q_0| \le r,\, |p| \le r} \left| \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \right| (|q_0| + 1) \right),\, 1 \right\}
\end{aligned}
$$

[5] Cfr. [MA96], pag. 232 e la referenza ivi segnalata.

$$
\begin{aligned}
A &\equiv \left(\frac{\partial p}{\partial u}(0)\right)^{-1} \\
c &\equiv \max\left\{ \sup_{|u|\le \bar R}\left|\frac{\partial p}{\partial u}(u)\right|,\ \sup_{|u|\le \bar R}\left|\frac{\partial q}{\partial u}(u)\right|,\right. \\
&\qquad \left. \max_{1\le i\le N-1}\sup_{|u|\le \bar R}\left|\frac{\partial I_i}{\partial u}(u)\right|,\ \max_{1\le i\le N-1}\sup_{|u|\le \bar R}\left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial u}(u)\right|\right\} \\
R_0 &\equiv \min\left\{ \bar R,\ \frac{r}{3c},\ \frac{1}{2\,|A|\sup_{|u|\le \bar R}\left|\frac{\partial^2 p}{\partial u^2}\right|},\ \frac{r}{2\max\left\{\sup_{|u|\le \bar R}\left|\frac{\partial I}{\partial u}\right|,\ \sup_{|u|\le \bar R}\left|\frac{\partial p}{\partial u}\right|\right\}},\right. \\
&\qquad \left. \left(\frac{r^{b+1}}{12(C\bar\lambda^{-1}+a)W}\right)^2 \right\} \\
T_0 &\equiv \max\left\{1,\ \frac{1}{\bar\lambda}\log\frac{3|q_0|}{r},\ \frac{1}{\bar\lambda}\log\frac{2|p_1|\,|A|}{R_0},\ \frac{2}{\bar\lambda}\log(8|A|\,|p_1|\,\bar\lambda^{-1}ML)\right\} \\
\bar\rho &\equiv \frac{\bar r}{3}
\end{aligned}
$$

Essendo $\omega(I_0,0)$ diofantino, inoltre, si può trovare un $t^\star$, $T_0 \le t^\star \le T_0 + T(\omega(I_0,0), r/6)$ tale che $|\varphi_0 - \varphi_1 - \omega(I_0,0)\,t^\star|_\infty < \bar r/6$. Sia allora $\rho \equiv \dfrac{r}{3D}\,e^{-2Lt^\star}$.

Per costruzione è

$$
T_0 \le \frac{1}{\bar\lambda}\log\frac{C}{r\,R_0} \tag{F.16}
$$

Inoltre, $\forall |u| \le R_0$ (usando anche il fatto che $\log x \le \sqrt{x}$)

$$
\begin{aligned}
&|\omega(I_0,0)\,t^\star - \omega(I(u),\xi(u))\,t^\star| \le \\
\le\ & \left(\sup_{|I-I_0|_\infty\le r,\,|q-q_0|\le r,\,|p|\le r}\left|\frac{\partial\omega(I,pq)}{\partial I}\right| |I_0 - I(u)| + \right. \\
+\ & \left. \sup_{|I-I_0|_\infty\le r,\,|q-q_0|\le r,\,|p|\le r}\left|\frac{\partial\omega(I,pq)}{\partial \xi}\right| |\xi(u)| \right) (T_0 + T(\omega(I_0,0),\bar r/6)) \le \\
\le\ & W\,|u|\left(\frac{1}{\bar\lambda}\log\frac{C}{rR_0} + \frac{a}{\bar r^b}\right) \le W\,R_0\left(\bar\lambda^{-1}\sqrt{\frac{C}{rR_0}} + \frac{a}{r^b}\right) \le \\
\le\ & W\,R_0\left(\bar\lambda^{-1}\frac{C}{r} + \frac{a}{r^b}\right)\frac{1}{\sqrt{R_0}} \le W\frac{\sqrt{R_0}}{r^b}(C\bar\lambda^{-1}+a) \le \frac{r}{12}
\end{aligned} \tag{F.17}
$$

in virtù della definizione di R_0. E poi $\forall |u| \leq R_0$ (utilizzando anche che $xe^{-x} \leq e^{-x/2}$)

$$\begin{aligned}
& |A\, e^{-\lambda(I(u),\xi(u))t^\star}\, \lambda\,(I(u),\xi(u)) \left(\frac{\partial\lambda}{\partial I}\,(I(u),\xi(u)) \cdot \frac{\partial I}{\partial u}(u) + \right. \\
+ \quad & \left. \frac{\partial\lambda}{\partial\xi}\,(I(u),\xi(u)) \cdot \frac{\partial\xi}{\partial u}(u)\right) p_1|\, t^\star \leq \\
\leq \quad & L\,|A|\,|p_1|\, e^{-\bar\lambda t^\star}\, Mt^\star \leq \frac{|A|\,|p_1|\,LM}{\bar\lambda}\, e^{-\frac{1}{2}\bar\lambda t^\star} \leq \\
\leq \quad & \frac{|A|\,|p_1|\,LM}{\bar\lambda}\, e^{-\frac{1}{2}\bar\lambda T_0} \leq \frac{1}{4} \qquad\qquad \text{(F.18)}
\end{aligned}$$

per definizione di T_0.

Poniamo dunque:

$$\mathcal{C}(u) \equiv u - A\left(p(u) - e^{-\lambda(I(u),\xi(u))t^\star} p_1\right) \qquad\qquad \forall u \in \mathbf{R}, |u| \leq R_0$$

Si ha, $\forall |u|, |\tilde u| \leq R_0$:

$$\begin{aligned}
& |\mathcal{C}(u) - \mathcal{C}(\tilde u)| \leq \sup_{|w|\leq R_0} \left|\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial u}(w)\right|\ |u-\tilde u| \leq \sup_{|w|\leq R_0} \left(\left|1 - A\frac{\partial p}{\partial u}(w)\right| + \right. \\
+ \quad & |A\, e^{-\lambda(I(w),\xi(w))t^\star} \left(\frac{\partial\lambda}{\partial I}\,(I(w),\xi(w)) \cdot \frac{\partial I}{\partial u}(w) + \frac{\partial\lambda}{\partial\xi}\,(I(w),\xi(w)) \cdot \frac{\partial\xi}{\partial u}(w)\right) \cdot \\
\cdot \quad & \left. p_1\, \lambda\,(I(w),\xi(w))\,|\, t^\star\right)\ |u-\tilde u| \overset{\text{(F.18)}}{\leq} \\
\leq \quad & \left(|A| \sup_{|w|\leq R_0}\left|\frac{\partial p}{\partial u}(0) - \frac{\partial p}{\partial u}(w)\right| + \frac{1}{4}\right)\ |u-\tilde u| \leq \\
\leq \quad & \left(|A| \sup_{|w|,|z|\leq R_0}\left|\frac{\partial^2 p}{\partial u}(z)\right|\ |w| + \frac{1}{4}\right)\ |u-\tilde u| \leq \\
\leq \quad & \left(|A| \sup_{|z|\leq R_0}\left|\frac{\partial^2 p}{\partial u^2}(z)\right|\ R_0\ + \frac{1}{4}\right) |u-\tilde u| \leq \frac{3}{4}|u-\tilde u|
\end{aligned}$$

e inoltre

$$\begin{aligned}
\frac{R_0}{2} \quad & \geq \quad \frac{1}{2}|u| \geq |\mathcal{C}(u) - \mathcal{C}(0)| = |\mathcal{C}(u) - A\, e^{-\lambda(I_0,0)t^\star}\, p_1| \geq \\
& \geq \quad |\mathcal{C}(u)| - |A|\, e^{-\bar\lambda t^\star}\, |p_1| \geq |\mathcal{C}(u)| - \frac{R_0}{2}
\end{aligned}$$

cioè $|\mathcal{C}(u)| \leq R_0$.

Abbiamo quindi che $\mathcal{C}$ è una contrazione su $\{|u| \leq R_0\}$: dall'esistenza di punto fisso, segue che $\exists \bar{u}$ tale che $e^{\lambda(I(\bar{u}),\xi(\bar{u}))t^\star} p(\bar{u}) = p_1$.

Sia allora $\bar{\eta} = \left(\bar{I}, \bar{\varphi}, \bar{p}, \bar{q}\right) \equiv (I(\bar{u}), \varphi(\bar{u}), p(\bar{u}), q(\bar{u}))$. Si noti che

$$|\bar{I} - I_0|_\infty = |I(\bar{u}) - I(0)|_\infty \leq \sup_{|u| \leq \bar{R}} \left| \frac{\partial I}{\partial u}(u) \right| \, |u| \leq cR_0 \leq \frac{r}{3} \tag{F.19}$$

e allo stesso modo $|\bar{p}| \leq r/3$, $|\bar{q} - q_0| \leq r/3$ e $|\bar{\varphi} - \varphi_0|_\infty \leq r/3$.

Da ciò si ottiene: $\forall |\rho'|, |\rho''|, |\bar{\rho}'|_\infty \leq \rho$, $|\bar{\rho}''|_\infty \leq \bar{\rho}$

$$\begin{aligned} |e^{-\lambda(\bar{I}+\bar{\rho}',(\bar{p}+\rho')(\bar{q}+\rho''))t^\star}(\bar{q}+\rho'')| &\leq e^{-\bar{\lambda}t^\star}|\bar{q}-q_0| + e^{-\bar{\lambda}t^\star}|q_0| + \rho \leq \\ &\leq \frac{r}{3} + \frac{r}{3} + \frac{r}{3} = r \end{aligned} \tag{F.20}$$

Inoltre, poichè

$$\begin{aligned} & |\lambda(\bar{I}+\bar{\rho}', (\bar{p}+\rho')(\bar{q}+\rho'') - \lambda(\bar{I}, \bar{p}\bar{q})| \leq \\ \leq & \sup_{|I-I_0|_\infty \leq \bar{r},\, |q-q_0| \leq r,\, |p| \leq r} \left|\frac{\partial \lambda}{\partial I}\right| \rho + \left|\frac{\partial \lambda}{\partial \xi}\right| \rho(\bar{q}+\bar{p}+1) \leq \\ \leq & \sup_{|I-I_0|_\infty \leq \bar{r},\, |q-q_0| \leq r,\, |p| \leq r} \left|\frac{\partial \lambda}{\partial I}\right| \rho + \left|\frac{\partial \lambda}{\partial \xi}\right| \rho(q_0 + \frac{r}{3} + \frac{r}{3} + 1) \leq D\rho \leq \frac{r}{3e^{2Lt^\star}} \end{aligned}$$

si ha

$$\begin{aligned} & |e^{\lambda(\bar{I}+\bar{\rho}',(\bar{p}+\rho')(\bar{q}+\rho''))t^\star} - e^{\lambda(\bar{I},\bar{p}\bar{q})t^\star}| = |\int_{\lambda(\bar{I},\bar{p}\bar{q})t^\star}^{\lambda(\bar{I}+\bar{\rho}',(\bar{p}+\rho')(\bar{q}+\rho''))t^\star} e^s \, ds| \leq \\ \leq \; & e^{Lt^\star}|\lambda(\bar{I}+\bar{\rho}', (\bar{p}+\rho')(\bar{q}+\rho'') - \lambda(\bar{I},\bar{p}\bar{q})|t^\star \leq \frac{r}{3} \end{aligned} \tag{F.21}$$

grazie alla precedente disuguaglianza. E quindi

$$\begin{aligned} & |e^{\lambda(\bar{I}+\bar{\rho}',(\bar{p}+\rho')(\bar{q}+\rho''))t^\star}(\bar{p}+\rho') - p_1| \leq \\ \leq \; & |e^{\lambda(\bar{I}+\bar{\rho}',(\bar{p}+\rho')(\bar{q}+\rho''))t^\star}\bar{p} - p_1| + e^{Lt^\star}\,\rho \leq \\ \leq \; & |e^{\lambda(\bar{I}+\bar{\rho}',(\bar{p}+\rho')(\bar{q}+\rho''))t^\star}\bar{p} - e^{\lambda(I(\bar{u}),\xi(\bar{u}))t^\star}\bar{p})| + |e^{\lambda(I(\bar{u}),\xi(\bar{u}))t^\star}\bar{p} - p_1| + \frac{r}{3} \overset{(F.21)}{\leq} \\ \leq \; & \frac{r}{3}|\bar{p}| + |e^{\lambda(I(\bar{u}),\xi(\bar{u}))t^\star}\bar{p} - p_1| + \frac{r}{3} = \frac{r}{3}|\bar{p}| + \frac{r}{3} < r \end{aligned} \tag{F.22}$$

avendo usato anche il fatto che $|\bar{p}| \leq r/3 < 1$. E poi:

$$
\begin{array}{rl}
& |\omega\left(\bar{I}+\bar{\rho}', (\bar{p}+\rho')(\bar{q}+\rho'')\right) - \omega(\bar{I},\bar{p}\bar{q})|t^\star \leq \\
\leq & \left(\sup\limits_{|I-I_0|_\infty \leq \bar{r},\, |q-q_0|\leq r,\, |p|\leq r} \left|\dfrac{\partial\omega}{\partial I}\right| \rho + \right. \\
+ & \left. \sup\limits_{|I-I_0|_\infty \leq \bar{r},\, |q-q_0|\leq r,\, |p|\leq r} \left|\dfrac{\partial\omega}{\partial \xi}\right| (\rho|\bar{q}| + \rho|\bar{p}| + \rho^2) \right) t^\star \leq \\
\leq & \left(\sup\limits_{|I-I_0|_\infty \leq \bar{r},\, |q-q_0|\leq r,\, |p|\leq r} \left|\dfrac{\partial\omega}{\partial I}\right| + \right. \\
+ & \left. \sup\limits_{|I-I_0|_\infty \leq \bar{r},\, |q-q_0|\leq r,\, |p|\leq r} \left|\dfrac{\partial\omega}{\partial \xi}\right| (|q_0| + \dfrac{r}{3} + \dfrac{r}{3} + \rho) \right) \rho t^\star \leq \\
\leq & \left(\sup\limits_{|I-I_0|_\infty \leq \bar{r},\, |q-q_0|\leq r,\, |p|\leq r} \left|\dfrac{\partial\omega}{\partial I}\right| + \right. \\
+ & \left. \sup\limits_{|I-I_0|_\infty \leq \bar{r},\, |q-q_0|\leq r,\, |p|\leq r} \left|\dfrac{\partial\omega}{\partial \xi}\right| (|q_0| + r) \right) \dfrac{r}{3D} e^{-2Lt^\star} t^\star \leq \dfrac{r}{12}
\end{array}
\tag{F.23}
$$

grazie alla definizione di D e al fatto che $e^{-2Lx}x \leq e^{-x}x < 1$. Quindi, da (F.17) e (F.23) e dalla costruzione di $t^\star$ si ottiene:

$$
\begin{array}{rl}
& |\bar{\varphi} + \bar{r}'' - \omega\left(\bar{I}+\bar{\rho}', (\bar{p}+\rho')(\bar{q}+\rho'')\right) t^\star - \varphi_1|_\infty \leq \\
\leq & |\bar{\varphi} - \varphi_0|_\infty + |\varphi_0 - \omega(I_0,0)t^\star - \varphi_1|_\infty + |\omega(I_0,0)t^\star - \omega(\bar{I},\bar{\xi})t^\star| + \\
+ & |\omega(\bar{I},\bar{\xi}) - \omega\left(\bar{I}+\bar{\rho}', (\bar{p}+\rho')(\bar{q}+\rho'')\right) t^\star| + \bar{\rho} \leq \\
\leq & \dfrac{r}{3} + \dfrac{\bar{r}}{6} + \dfrac{r}{12} + \dfrac{r}{12} + \dfrac{\bar{r}}{3} \leq \bar{r}
\end{array}
\tag{F.24}
$$

Dalle (F.19), (F.20), (F.22), (F.24) segue che

$$
\Phi^{-t^\star}\left(\mathcal{B}_{\rho,\bar{\rho}}(\bar{\eta})\right) \subseteq \mathcal{B}_{r,\bar{r}}(\zeta) \qquad \square
$$

G Alcuni Lemmi tecnici utilizzati negli algoritmi KAM

Lemma G.1

$$\begin{array}{rcl} \#\{n \in \mathbf{Z}^\ell,\ |n| = m\} & \le & 2^\ell m^{\ell-1} \\ \#\{n \in \mathbf{Z}^\ell,\ 0 < |n| \le m\} & \le & 2^\ell m^\ell \end{array}$$

DIM. Induzione su ℓ: nel primo caso il passo induttivo è

$$\begin{array}{rl} & \#\{n \in \mathbf{Z}^\ell,\ |n| = m\} = \\ = & \sum_{j=0}^{m} \#\{n \in \mathbf{Z}^\ell,\ |n_1| + \ldots + |n_{\ell-1}| = m - j \text{ e } n_\ell = \pm j\} = \\ = & 2\sum_{j=0}^{m} \#\{n \in \mathbf{Z}^{\ell-1},\ |n_1| + \ldots + |n_{\ell-1}| = m - j\} \le \\ \le & 2\sum_{j=0}^{m} 2^{\ell-1}(m-j)^{\ell-2} = \\ = & 2^\ell \sum_{i=0}^{m} i^{\ell-2} = 2^\ell \sum_{i=1}^{m} i^{\ell-2} \le 2^\ell \sum_{i=0}^{m} m^{\ell-2} = 2^\ell m^{\ell-1} \end{array}$$

E la seconda relazione è analoga. □

Lemma G.2 *Sia* $\ell \ge 1$, $a \ge 0$, $0 < \delta < 1$ *e*

$$\begin{array}{rcl} c(a,\ell) & \equiv & \left(\frac{2a}{e}\right)^a \cdot 5^\ell \\ c'(a,\ell) & \equiv & 2^{\ell+a}\, c(a,\ell) \end{array} \tag{G.1}$$

Allora[1]*:*

$$\begin{array}{rcl} \sum_{n\in\mathbf{Z}^\ell} |n|^a\, e^{-|n|\delta} & \le & c(a,\ell)\, \delta^{-(\ell+a)} \\ \sum_{\substack{n\in\mathbf{Z}^\ell \\ |n|\ge N}} |n|^a\, e^{-|n|\delta} & \le & c'(a,\ell)\, \delta^{-(\ell+a)}\, e^{-N\delta/2} \end{array} \tag{G.2}$$

[1] Le (G.2) sono valide anche per $a = 0$, definendo $a^a|_{a=0} \equiv 1$. In effetti, le stime nel caso $a = 0$ possono essere facilmente migliorate; ad esempio, si potrebbe prendere $c(0,\ell) = 3^\ell$.

DIM. Studiando la funzione $t \in \mathbf{R} \longmapsto t^a\, e^{-t\delta/2}$ si vede che

$$\sup_{t\geq 0} t^a\, e^{-t\delta/2} = t^a\, e^{-t\delta/2}\Big|_{t=2a/\delta} = \left(\frac{2a}{e\delta}\right)^a \tag{G.3}$$

Per cui

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbf{Z}^\ell} |n|^a\, e^{-|n|\delta} &= \sum_{n\in\mathbf{Z}^\ell} |n|^a\, e^{-|n|\delta/2} e^{-|n|\delta/2} \leq \\
&\leq \sup_{t\geq 0} t^a\, e^{-t\delta/2} \sum_{n\in\mathbf{Z}^\ell} e^{-|n|\delta/2} \stackrel{(G.3)}{=} \\
&= \left(\frac{2a}{e\delta}\right)^a \big(\sum_{k\in\mathbf{Z}} e^{-k\delta/2}\big)^\ell = \\
&= \left(\frac{2a}{e\delta}\right)^a \cdot \left(1 + 2\cdot\frac{e^{-\delta/2}}{1-e^{-\delta/2}}\right)^\ell = \\
&= \left(\frac{2a}{e\delta}\right)^a \cdot \left(1 + 2\cdot\frac{1}{e^{\delta/2}-1}\right)^\ell
\end{aligned}$$

Da cui, essendo $e^{\delta/2} - 1 \geq \delta/2$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbf{Z}^\ell} |n|^a\, e^{-|n|\delta} &\leq \left(\frac{2a}{e\delta}\right)^a \cdot \left(1 + \frac{4}{\delta}\right)^\ell \leq \\
&\leq \left(\frac{2a}{e\delta}\right)^a \cdot \left(\frac{5}{\delta}\right)^\ell
\end{aligned}$$

che prova la prima disuguaglianza.

La seconda discende dalla prima:

$$\sum_{\substack{n\in\mathbf{Z}^\ell\\ |n|\geq N}} |n|^a\, e^{-|n|\delta} = \sum_{\substack{n\in\mathbf{Z}^\ell\\ |n|\geq N}} |n|^a\, e^{-|n|\delta/2} e^{-|n|\delta/2} \leq$$

$$\leq e^{-N\delta/2} \sum_{\substack{n\in\mathbf{Z}^\ell\\ |n|\geq N}} |n|^a\, e^{-|n|\delta/2} \leq e^{-N\delta/2} c(a,\ell)\, (\delta/2)^{-(\ell+a)} \qquad \square$$

Lemma G.3 (Stima sulle parentesi di Poisson) *Sia* $V \subseteq \mathbf{R}^N$ *e siano*

$$\Omega \equiv \{(y,x) \in \mathbf{C}^N \times \mathbf{T}^N \ \text{tc}\ e^{-\sigma_i} \leq |e^{x_i}| \leq e^{\sigma_i} \ \text{e}$$

$$
\begin{aligned}
&\exists z \in V \ \text{ tc } |y_i - z_i| \le \rho_i, \ 1 \le i \le N\},\\
&\bar\Omega \equiv \{(y,x) \in \mathbf{C}^N \times \mathbf{T}^N \ \text{ tc } e^{-\bar\sigma_i} \le |e^{x_i}| \le e^{\bar\sigma_i} \ \text{ e}\\
&\exists z \in V \ \text{ tc } |y_i - z_i| \le \bar\rho_i, \ 1 \le i \le N\},\\
&\tilde\Omega \equiv \{(y,x) \in \mathbf{C}^N \times \mathbf{T}^N \ \text{ tc } e^{-\tilde\sigma_i} \le |e^{x_i}| \le e^{\tilde\sigma_i} \ \text{ e}\\
&\exists z \in V \ \text{ tc } |y_i - z_i| \le \tilde\rho_i, \ 1 \le i \le N\}
\end{aligned}
$$

con $0 < \tilde\rho_i < \bar\rho_i < \rho_i$ *e* $0 < \tilde\sigma_i < \bar\sigma_i < \sigma_i$, $\forall\, 1 \le i \le N$. *Sia* f *analitica su* Ω *e* g *analitica su* $\bar\Omega$. *Allora*

$$
\begin{aligned}
&\sup_{\tilde\Omega} |\{f,g\}| \le 2 \sup_{\Omega} |f| \ \sup_{\bar\Omega} |g| \cdot\\
&\cdot \max\left\{ \sum_{i=1}^N \frac{1}{(\sigma_i - \tilde\sigma_i)(\bar\rho_i - \tilde\rho_i)}, \ \sum_{i=1}^N \frac{1}{(\rho_i - \tilde\rho_i)(\bar\sigma_i - \tilde\sigma_i)} \right\} \le\\
\le \ & 2 \sup_{\Omega} |f| \ \sup_{\bar\Omega} |g| \sum_{i=1}^N \frac{1}{(\bar\sigma_i - \tilde\sigma_i)(\bar\rho_i - \tilde\rho_i)}
\end{aligned}
\tag{G.4}
$$

Inoltre, con le notazioni di pagina 41

$$
\sup_{\tilde\Omega} |L_g^j f| \le 8^{j^2} (\sup_{\Omega} |f|)^j \ \sup_{\bar\Omega} |g| \ \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{(\bar\sigma_i - \tilde\sigma_i)\,(\bar\rho_i - \tilde\rho_i)} \right)^j \tag{G.5}
$$

DIM. Con la Stima di Cauchy:

$$
\begin{aligned}
&\sup_{\tilde\Omega} |\{f,g\}| \le \sup_{\tilde\Omega} |\partial_x f \cdot \partial_y g| + |\partial_y f \cdot \partial_x g| \le\\
\le \ & \sum_{i=1}^N \left(\frac{\sup_\Omega |f| \ \sup_{\bar\Omega} |g|}{(\sigma_i - \tilde\sigma_i)(\bar\rho_i - \tilde\rho_i)} + \frac{\sup_\Omega |f| \ \sup_{\bar\Omega} |g|}{(\rho_i - \tilde\rho_i)(\bar\sigma_i - \tilde\sigma_i)} \right)
\end{aligned}
$$

che prova la (G.4).

La (G.5) si prova per induzione su j. La (G.4) è la base dell'induzione. Poniamo poi

$$
\rho_i^* \equiv \frac{\bar\rho_i + \tilde\rho_i}{2} \qquad\qquad \sigma_i^* \equiv \frac{\bar\sigma_i + \tilde\sigma_i}{2}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Omega \equiv \{(y,x) \in \mathbf{C}^N \times \mathbf{T}^N \ \text{ tc } e^{-\sigma_i} \le |e^{x_i}| \le e^{\sigma_i} \ \text{ e}\\
&\quad \exists z \in V \ \text{ tc } |y_i - z_i| \le \rho_i, \ 1 \le i \le N\},
\end{aligned}
$$

cosí che

$$
\sup_{\tilde\Omega} |L_g^{j+1} f| \overset{(G.4)}{\le} 2 \sup_{\Omega} |f| \ \sup_{\Omega^*} |L_g^j f| \ \sum_{i=1}^N \frac{1}{(\sigma^*{}_i - \tilde\sigma_i)\,(\rho^*{}_i - \tilde\rho_i)} =
$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\sup_{\Omega}|f|\ \sup_{\Omega^*}|L_g^j f|\ \sum_{i=1}^{N}\frac{4}{(\bar\sigma_i-\tilde\sigma_i)\,(\bar\rho_i-\tilde\rho_i)} \leq \\
&\leq 2\cdot 8^{j^2}(\sup_{\Omega}|f|)^{j+1}\ \sup_{\bar\Omega}|g|\ \left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{(\bar\sigma_i-\sigma^*{}_i)\,(\bar\rho_i-\rho^*{}_i)}\right)^j \cdot \\
&\quad \cdot\sum_{i=1}^{N}\frac{4}{(\bar\sigma_i-\tilde\sigma_i)\,(\bar\rho_i-\tilde\rho_i)} = \\
&= 2\cdot 8^{j^2}(\sup_{\Omega}|f|)^{j+1}\ \sup_{\bar\Omega}|g|\ \left(\sum_{i=1}^{N}\frac{4}{(\bar\sigma_i-\tilde\sigma_i)\,(\bar\rho_i-\tilde\rho_i)}\right)^j \cdot \\
&\quad \cdot\sum_{i=1}^{N}\frac{4}{(\bar\sigma_i-\tilde\sigma_i)\,(\bar\rho_i-\tilde\rho_i)}
\end{aligned}
$$

che completa il passo induttivo. □

Lemma G.4 *Se $\alpha : B_r(z_0) \subset \mathbf{C}^\ell \longrightarrow \mathbf{C}^\ell$ è olomorfa con jacobiana α' invertibile, allora α è analiticamente invertibile, cioè $\exists\beta : \alpha(B_r(z_0)) \longrightarrow B_r(z_0)$ olomorfa tale che $\alpha\circ\beta(w) = w$ e $\beta\circ\alpha(z) = z$.*

DIM. Dico che α è iniettiva: P.A. $\exists z \neq \bar z$ tali che $\alpha(z) = \alpha(\bar z)$. Allora $\exists z^\star$ tale che

$$0 = \alpha(z) - \alpha(\bar z) = \alpha'(z^\star)\cdot(z-\bar z)$$

per cui esiste un vettore $v \equiv z - \bar z \neq 0$ che verifica $\alpha'(z^\star)\cdot v = 0$, contraddicendo l'invertibilità della matrice α'.

Quindi α ammette un'inversa[2]. □

L'analogo reale del precedente Lemma è

Lemma G.5 *Se $\alpha : B_r(z_0) \subset \mathbf{R}^\ell \longrightarrow \mathbf{R}^\ell$ è analitica con jacobiana α' invertibile, allora α è analiticamente invertibile.*

Lemma G.6 (Applicazione aperta) *Sia $\alpha : B_r(x_0) \subset \mathbf{R}^\ell \longrightarrow \mathbf{R}^\ell$ differenziabile con jacobiana invertibile. Allora α è iniettiva e aperta. Inoltre*

$$\alpha\left(B_r(x_0)\right) \supseteq B_\rho\left(\alpha(x_0)\right)$$

con $\rho \equiv \dfrac{r}{\sup\limits_{B_r(x_0)} |(\alpha')^{-1}|}$.

[2]Tale inversa è analitica, perchè l'inversa di una funzione analitica è analitica.

DIM. α è aperta per il Teorema della Funzione Inversa ed è iniettiva per il Lemma precedente. Essendo α iniettiva e aperta, si ha[3]

$$\partial\left(\alpha\left(B_r(x_0)\right)\right)=\alpha\left(\partial B_r(x_0)\right) \tag{G.6}$$

Perciò per mostrare $\alpha\left(B_r(x_0)\right)\supseteq B_\rho\left(\alpha(x_0)\right)$ è sufficiente far vedere che $\forall x\in\partial B_r(x_0)$ si ha $|\alpha(x)-\alpha(x_0)|\geq\rho$. E difatti: denotando con $x^\star$ un punto che verifichi $\alpha(x)-\alpha(x_0)=\alpha'(x^\star)\cdot(x-x_0)$,

$$r=|x-x_0|=|(\alpha')^{-1}(x^\star)\cdot(\alpha(x)-\alpha(x_0))|\leq\sup_{B_r(x_0)}|(\alpha')^{-1}|\,|\alpha(x)-\alpha(x_0)|$$

cioè proprio $|\alpha(x)-\alpha(x_0)|\geq\rho$. □

Lemma G.7 *Siano $\alpha,\beta:B_r(x_0)\subset\mathbf{R}^\ell\longrightarrow\mathbf{R}^\ell$ differenziabili e assumiamo che la jacobiana di α sia invertibile. Se*

$$\begin{array}{rcl}\sup\limits_{B_r(x_0)}|(\alpha')^{-1}|\cdot\sup\limits_{B_r(x_0)}|\beta| & \leq & r\\ \sup\limits_{B_r(x_0)}|(\alpha')^{-1}|\cdot\sup\limits_{B_r(x_0)}|\beta'| & < & 1\end{array} \tag{G.7}$$

allora $\exists!x_1\in B_r(x_0)$ tale che

$$\begin{array}{rcl}\alpha(x_0) & = & \alpha(x_1)+\beta(x_1)\\ |x_1-x_0| & \leq & \sup\limits_{B_r(x_0)}|(\alpha')^{-1}|\cdot\sup\limits_{B_r(x_0)}|\beta|\leq r\end{array} \tag{G.8}$$

DIM. Denotiamo

$$\lambda\equiv\sup_{B_r(x_0)}|(\alpha')^{-1}|$$

Essendo $\sup_{B_r(x_0)}|\beta|\leq r/\lambda\equiv\rho$, si ha, $\forall x\in B_r(x_0)$, che $\alpha(x_0)-\beta(x)\in B_\rho\left(\alpha(x_0)\right)$. Invocando il Lemma G.6 si ha quindi $\alpha(x_0)-\beta(x)\in\alpha\left(B_r(x_0)\right)$, per cui, essendo α iniettiva per il Lemma G.5, è ben definita la funzione

$$\mathcal{C}(x)\equiv\alpha^{-1}\left(\alpha(x_0)-\beta(x)\right)\qquad x\in B_r(x_0)$$

Si vede che $\mathcal{C}$ è una contrazione su $B_r(x_0)$, per cui $\exists!x_1\in B_r(x_0)$ tale che $\mathcal{C}(x_1)=x_1$, cioè $\alpha(x_0)=\alpha(x_1)+\beta(x_1)$.

[3]Qui ∂ indica l'operatore di bordo. Una dimostrazione di (G.6) si trova nel Lemma 9.47 di [C].

Inoltre

$$|x_1 - x_0| = |\alpha^{-1}(\alpha(x_0) - \beta(x_1)) - \alpha^{-1}(\alpha(x_0))| \leq \lambda|\beta(x_1)| \leq \lambda \sup_{B_r(x_0)} |\beta| \leq r$$

□

Lemma G.8 (Inversione di perturbazioni dell'identità) *Sia E uno spazio di Banach e Ω un suo sottoinsieme chiuso. Denotiamo*

$$\Omega_\delta \equiv \{z \in \Omega \text{ tc } B_\delta(z) \subseteq \Omega\}$$

Sia $G : \Omega \subseteq E \longrightarrow E$, $G(z) = z + g(z)$ con g analitica e

$$\sup_{z\in\Omega} |g'| < 1 \qquad\qquad \sup_{z\in\Omega} |g| \leq \delta$$

Allora G è analiticamente invertibile e $G(\Omega) \supseteq \Omega_\delta$. Inoltre, l'inversa di G ha la forma

$$G^{-1}(\zeta) = \zeta + \tilde{g}(z)$$

con

$$\sup_{\zeta\in\Omega_\delta} |\tilde{g}| \leq \sup_{z\in\Omega} |g(z)|$$

DIM. Fissato $\zeta \in \Omega_\delta$ posso definire $\mathcal{C}(z) \equiv \zeta - g(z)$, che si verifica essere una contrazione su $B_\delta(\zeta)$. Dall'esistenza e unicità di punto fisso segue l'invertibilità di G e il fatto che $G(\Omega) \supseteq \Omega_\delta$.

Poniamo poi $\tilde{g}(\zeta) \equiv G^{-1}(\zeta) - \zeta$. Allora $\forall\zeta \in \Omega_\delta \subseteq G(\Omega)$ si ha che $\exists z \in \Omega$ tale che $\zeta = G(z)$ e quindi

$$z = G^{-1} \circ G(z) = G^{-1}(\zeta) = \zeta + \tilde{g}(\zeta) = z + g(z) + \tilde{g}(\zeta)$$

per cui $|\tilde{g}(\zeta)| = |g(z)| \leq \sup_\Omega |g|$. □

I prossimi due risultati sono la generalizzazione dei Lemmi G.4, G.6 e G.7: le loro dimostrazioni sono essenzialmente analoghe a quelle dei Lemmi precedenti, ma per maggiore chiarezza le riporto ugualmente in dettaglio.

Lemma G.9 *Sia $x : \mathcal{S} \in \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}^\ell$ una curva analitica. Denotiamo*

$$\Omega \equiv \bigcup_{s\in\mathcal{S}} B_r(x(s)) \subset \mathbf{C}^\ell$$

Sia $\alpha(x,s) : \Omega \times \mathcal{S} \longrightarrow \mathbf{C}^\ell$ *analitica Assumiamo che la matrice* $\partial_x \alpha(x,s)$ *sia invertibile* $\forall (x,s) \in \Omega \times \mathcal{S}$ *e sia*

$$m \equiv \sup_{x \in \Omega,\, s \in \mathcal{S}} \left| (\partial_x \alpha(x,s))^{-1} \right|$$

Allora, fissata $s \in \mathcal{S}$, $\bar{\alpha}_s(x) \equiv \alpha(x,s)$ *è iniettiva; cioè*

$$\alpha(x,s) = \alpha(y,s),\ x, y \in \Omega \implies x = y \tag{G.9}$$

Inoltre, posto $\rho \equiv m^{-1}\, r$,

$$\alpha \left(B_r \left(x(s) \right) \times \{s\} \right) \supseteq B_\rho \left(\alpha \left((x(s)) \times \{s\} \right) \right) \tag{G.10}$$

DIM. Se P.A. fosse $\alpha(x,s) = \alpha(y,s)$ con $x \neq y$, esisterebbe z tale che

$$0 = \alpha(x,s) - \alpha(y,s) = \partial_x \alpha(z,s) \cdot (x - y)$$

contraddicendo l'invertibilità di $\partial_x \alpha$. Ciò prova (G.9).

Fissiamo $s \in \mathcal{S}$. Essendo $\bar{\alpha}_s$ iniettiva si ha

$$\partial \left(\bar{\alpha}_s \left(B_r \left(x(s) \right) \right) \right) = \bar{\alpha}_s \left(\partial B_r \left(x(s) \right) \right)$$

Perciò per mostrare (G.10), cioè per mostrare che $\bar{\alpha}_s \left(B_r \left(x(s) \right) \right) \supseteq B_\rho \left(\bar{\alpha}_s \left(x(s) \right) \right)$ è sufficiente far vedere che $\forall z \in \partial B_r \left(x(s) \right)$ si ha $|\bar{\alpha}_s(z) - \bar{\alpha}_s(x(s))| \geq \rho$. E difatti: denotando con $x^\star$ un punto che verifichi

$$\bar{\alpha}_s(z) - \bar{\alpha}_s(x(s)) = \partial_x \bar{\alpha}_s(x^\star) \cdot (z - x(s)) = \partial_x \alpha(x^\star, s) \cdot (z - x(s))$$

si ha:

$$r = |z - x(s)| = |(\partial_x \alpha)^{-1}(x^\star) \cdot (\bar{\alpha}_s(z) - \bar{\alpha}_s(x(s)))\,| \leq m\, |\bar{\alpha}_s(z) - \bar{\alpha}_s(x(s))| \quad \square$$

Lemma G.10 *Sia* $x : \mathcal{S} \in \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}^\ell$ *una curva analitica. Denotiamo*

$$\Omega \equiv \bigcup_{s \in \mathcal{S}} B_r \left(x(s) \right) \subset \mathbf{C}^\ell$$

Siano $\alpha, \beta : \Omega \times \mathcal{S} \longrightarrow \mathbf{C}^\ell$ *analitiche. Supponiamo* $\partial_x \alpha$ *invertibile e sia*

$$m \equiv \sup_{x \in \Omega,\, s \in \mathcal{S}} \left| (\partial_x \alpha(x,s))^{-1} \right|$$

Se

$$\begin{aligned} m\sup_{\Omega\times\mathcal{S}}|\beta| &\leq r \\ m\sup_{\Omega\times\mathcal{S}}|\partial_x\beta| &< 1 \end{aligned} \tag{G.11}$$

allora esiste un'unica curva analitica $y(s)$ tale che

$$\begin{aligned} \alpha(x(s)) &= \alpha(y(s))+\beta(y(s)) \\ \sup_{s\in\mathcal{S}}|y(s)-x(s)| &\leq m\sup_{\Omega\times\mathcal{S}}|\beta|\leq r \end{aligned} \tag{G.12}$$

DIM. Essendo $\sup_{\Omega\times\mathcal{S}}|\beta|\leq r/m\equiv\rho$, si ha, $\forall(x,s)\in\Omega\times\mathcal{S}$, che $\alpha(x(s),s)-\beta(x,s)\in B_\rho\left(\alpha(x(s),s)\right)$. Invocando il Lemma G.9 si ha quindi $\alpha(x(s),s)-\beta(x,s)\in\alpha\left(B_r(x(s))\times\{s\}\right)$.

Da ciò e da (G.9) so quindi che, $\forall x\in\Omega\ \exists! w=w(x,s)\in\Omega$ tale che

$$\alpha(x(s),s)-\beta(x,s)=\alpha(w,s)$$

Sia quindi

$$\mathcal{C}(y(s))\equiv w(y(s),s) \qquad\qquad y(s)\in\mathcal{X}$$

avendo definito

$$\mathcal{X}\equiv\{y(s):\mathcal{S}\longrightarrow\mathbf{C}^\ell \text{ con } y(s)\in B_r(x(s))\}$$

Si ha che $\mathcal{C}$ è una contrazione su $\mathcal{X}$: infatti da

$$\begin{aligned} \alpha(x(s),s)-\beta(y(s),s) &= \alpha(w(y(s),s),s) \\ \alpha(x(s),s)-\beta(z(s),s) &= \alpha(w(z(s),s),s) \end{aligned}$$

sottraendo membro a membro e chiamando $\zeta(s)$ la curva che verifica

$$\alpha(w(y(s),s),s)-\alpha(w(z(s),s),s)=\partial_x\alpha(\zeta(s),s)\cdot(w(y(s),s)-w(z(s),s))$$

si ha

$$\begin{aligned} & |w(y(s),s)-w(z(s),s)|\leq|\left(\partial_x\alpha(\zeta(s),s)\right)^{-1}|\,|\beta(y(s),s)-\beta(z(s),s)|\leq \\ \leq\ & m\sup_{\Omega\times\mathcal{S}}|\partial_x\beta|\,|y(s)-z(s)| \end{aligned}$$

ciò mostra che $\mathcal{C}$ è una contrazione su $\mathcal{X}$ dotato della norma

$$\parallel y(s)\parallel\equiv\sup_{s\in\mathcal{S}}|y(s)|$$

Dall'esistenza e unicità di punto fisso segue che $\exists ! \bar{y}(s)$ tale che

$$\alpha(\bar{y}(s),s) = \alpha\left(\mathcal{C}(\bar{y}(s)),s\right) = \alpha(w(\bar{y}(s),s),s) = \alpha(x(s),s) - \beta(\bar{y}(s),s)$$

Inoltre, denotando con $\xi(s)$ la curva verificante

$$\alpha(x(s),s) - \alpha(\bar{y}(s),s) = \partial_x \alpha(\xi(s),s) \cdot (x(s) - \bar{y}(s))$$

si ottiene:

$$|x(s) - \bar{y}(s)| \leq |\left(\partial_x \alpha(\xi(s),s)\right)^{-1}| \, |\alpha(x(s),s) - \alpha(\bar{y}(s),s)| \leq$$

$$\leq m\,|\beta(\bar{y}(s),s)| \leq m \sup_{\Omega\times\mathcal{S}} |\beta| \leq r \qquad \square$$

Lemma G.11 (Perturbazioni di matrici invertibili) *Consideriamo $M, N \in \mathrm{Mat}(\ell \times \ell)$. Se M è invertibile e*

$$|N| < \frac{1}{|M^{-1}|}$$

allora anche $M + N$ è invertibile. Inoltre

$$|(M+N)^{-1}| \leq \frac{|M^{-1}|}{1 - |M^{-1}|\,|N|}$$

DIM. La serie

$$\sum_{k\geq 0} (-1)^k \,(M^{-1}\,N)^k$$

converge in quanto $|M^{-1}\,N| \leq |M^{-1}|\,|N| < 1$ e quindi

$$M^{-1} \sum_{k\geq 0} (-1)^k \,(M^{-1}\,N)^k = M^{-1}\,(I + M^{-1}\,N)^{-1} = (M+N)^{-1}$$

E poi

$$|(M+N)^{-1}| \leq |M^{-1}| \sum_{k\geq 0} (|M^{-1}|\,|N|)^k \leq \frac{|M^{-1}|}{1 - |M^{-1}|\,|N|} \qquad \square$$

Da questo risultato segue ovviamente che

Lemma G.12 *Siano $M, N \in \mathrm{Mat}(\ell \times \ell)$. Se M è invertibile e*

$$|N| \le \frac{1}{2\,|M^{-1}|}$$

allora anche $M+N$ è invertibile. Inoltre

$$|(M+N)^{-1}| \le 2\,|M^{-1}|$$

Lemma G.13 *Sia $h(I, J; \mu) : \mathbf{C}^{\ell-1} \times \mathbf{C} \times \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ reale analitica in*

$$W \equiv \{(I, J; \mu) : \mathbf{C}^{\ell-1} \times \mathbf{C} \times \mathbf{C} \text{ tc } |I - \bar{I}| \le \rho,\ |J| \le r,\ |\mu| \le \bar{\mu}\}$$

Denotiamo $\omega \equiv \partial_I h(\bar{I}, 0; 0)$ e $E \equiv h(\bar{I}, 0; 0)$. Assumiamo che esista una costante $c > 0$ tale che, $\forall (I, J; \mu) \in W$ la matrice

$$M(I, J; \mu) \equiv \begin{pmatrix} \partial_I^2 h(I, J; \mu) & c\partial_I h(I, J; \mu) \\ c\partial_I h(I, J; \mu) & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(\ell \times \ell)$$

sia invertibile.

Allora nelle vicinanze di $J = 0 = \mu$ esistono e sono uniche due funzioni reali analitiche $\mathcal{I}(J; \mu)$ e $\alpha(J; \mu)$ tali che $\mathcal{I}(0; 0) = \bar{I}$, $\alpha(0; 0) = 0$ e

$$\begin{array}{rcl} \partial_I h(\mathcal{I}(J; \mu), J; \mu) & = & \omega\,(1 + \alpha(J; \mu)) \\ h(\mathcal{I}(J; \mu), J; \mu) & = & E \end{array} \tag{G.13}$$

Più precisamente: siano

$$\begin{array}{ccc} \sup|\partial_I^2 h| \le A_0 & \sup|\partial_{IJ}^2 h| \le D_0 & \sup|\partial_{I\mu}^2 h| \le M_0 \\ \sup|\partial_J h| \le V_0 & \sup|\partial_\mu h| \le Z_0 & \sup|M^{-1}| \le B_0 \\ \sup|\partial_\mu \partial_I^2 h| \le M_0' & \sup|\partial_I^3 h| \le D_0' & \sup|\partial_J \partial_I^2 h| \le A_0' \end{array}$$

dove il $\sup$ *è fatto su W, e siano*

$$\begin{aligned} \rho_0 &\le \min\left\{\rho,\ \frac{1}{6\ell B_0(cA_0 + D_0')}\right\} \\ r_0 &\le \min\left\{r,\ \frac{1}{6\ell B_0(cD_0 + A_0')},\ \frac{\rho_0}{4B_0(D_0 + cV_0)}\right\} \\ \mu_0 &\le \min\left\{\bar{\mu},\ \frac{1}{6\ell B_0(cM_0 + M_0')},\ \frac{\rho_0}{4B_0(M_0 + cZ_0)}\right\} \end{aligned}$$

allora, se $|J| \le r_0$, $|\mu| \le \mu_0$ *si ha* $|\mathcal{I}(J;\mu) - \bar I| \le \rho_0$ *e* $|\alpha(J;\mu)| \le c\rho_0$. *Infine:*

$$\begin{aligned}
\sup|\partial_J \mathcal{I}| &\le B_0 \ell (D_0 + cV_0 + cM_0 + c^2 Z_0)\\
\sup|\partial_\mu \mathcal{I}| &\le B_0 c^{-1}\, \ell (D_0 + cV_0 + cM_0 + c^2 Z_0)\\
\sup|\partial_J \alpha| &\le B_0 c\, \ell (D_0 + cV_0 + cM_0 + c^2 Z_0)\\
\sup|\partial_\mu \alpha| &\le B_0 \ell (D_0 + cV_0 + cM_0 + c^2 Z_0)
\end{aligned}$$

dove il sup *è fatto su* $|J| \le r_0$, $|\mu| \le \mu_0$.

DIM. Sia $\mathcal{F}(y,a,J;\mu) \equiv (\partial_I h(y,J;\mu) - \omega(1-ca),\, c\,h(y,J;\mu) - c\,E)$. È $\mathcal{F}(\bar I,0,0;0) = 0$ e $\partial_{(y,a)}\mathcal{F}(\bar I,0,0;0) = M(\bar I,0;0)$: per il Teorema del Dini esistono e sono uniche due funzioni reali analitiche $y(J;\mu)$ e $a(J;\mu)$ in modo che

$$\begin{aligned}
\partial_I h(y(J;\mu),J;\mu) &= \omega\,(1 - ca(J;\mu))\\
h(y(J;\mu),J;\mu) &= E
\end{aligned}$$

Quantitativamente se $|(y-\bar I, a)| \le \rho_0$, $|J| \le r_0$, $|\mu| \le \mu_0$

$$\begin{aligned}
& |\mathcal{F}(\bar I,0,J;\mu)| = |\left(\partial_I h(\bar I,J;\mu) - \omega,\ c\,h(\bar I,J;\mu) - c\,h(\bar I,0;0)\right)| \overset{\text{(G.14)}}{\le}\\
\le\ & |\partial_I h(\bar I,J;\mu) - \partial_I h(\bar I,0;0)| + c|h(\bar I,J;\mu) - h(\bar I,0;0)| \le\\
\le\ & D_0\, r_0 + M_0\mu_0 + cV_0 r_0 + cZ_0\mu_0 \le \frac{\rho_0}{2|M^{-1}(\bar I,0;0)|}\\
\text{e}\qquad & |I - M^{-1}(\bar I,0;0)\partial_{(y,\alpha)}\mathcal{F}(y,a,J;\mu)| \le\\
\le\ & |M^{-1}(\bar I,0;0)| \left| M(\bar I,0;0) - \begin{pmatrix} \partial_I^2 h(y,J;\mu) & c\omega\\ c\partial_I h(y,J;\mu) & 0\end{pmatrix}\right| \le\\
\le\ & \ell B_0 (|\partial_I^2 h(\bar I,0;0) - \partial_I^2 h(y,J;\mu)| + c\,|\partial_I h(\bar I,0;0) - \partial_I h(y,J;\mu)|) \le\\
\le\ & \ell B_0\,(D_0'\rho_0 + A_0' r_0 + M_0'\mu_0 + cA_0\rho_0 + cD_0 r_0 + cM_0\mu_0) \le \frac12
\end{aligned}$$

in cui ho usato il fatto che

$$\begin{aligned}
& |(\zeta_1,\ldots,\zeta_{\ell-1},\xi)| = \left(\sum_{i=1}^{\ell-1}\zeta_i^2\ +\ \xi^2\right)^{1/2} \le\\
\le\ & \left(\sum_{i=1}^{\ell-1}\zeta_i^2\right)^{1/2} + (\xi^2)^{1/2} = |(\zeta_1,\ldots,\zeta_{\ell-1})| + |\xi| \qquad \text{(G.14)}
\end{aligned}$$

Per cui[4]: $\forall |J| \leq r_0,\ |\mu| \leq \mu_0$

$$\max\{|y(J;\mu) - \bar{I}|,\ |a(J,\mu)|\} \leq |(y(J;\mu) - \bar{I},\ a(J,\mu))| \leq \rho_0$$

E infine, essendo $\mathcal{F}(y(J, c^{-1}\mu), a(J, c^{-1}\mu), J, c^{-1}\mu) = 0$, derivando rispetto a $(J, c^{-1}\mu)$ si ottiene:

$$\begin{aligned} & \max\Big\{|\partial_J y|,\ c^{-1}\,|\partial_\mu y|,\ |\partial_J a|,\ c^{-1}\,|\partial_\mu a|\Big\} = \\ & \max\{|\partial_J y|,\ |\partial_{c^{-1}\mu} y|,\ |\partial_J a|,\ |\partial_{c^{-1}\mu} a|\} \leq \\ \leq\ & \Big|\partial_{(J,c^{-1}\mu)}(y,a)\Big| = \Big|-(\partial_{y,a}\mathcal{F})^{-1} \cdot \partial_{J,c^{-1}\mu}\mathcal{F}\Big| \leq \\ \leq\ & B_0 \ell (D_0 + cV_0 + cM_0 + c^2 Z_0) \end{aligned}$$

La tesi segue quindi ponendo $\mathcal{I}(J;\mu) \equiv y(J;\mu)$ e $\alpha(J;\mu) \equiv -ca(J;\mu)$. $\square$

Lemma G.14 *Sia* $X(J;\mu) : \mathbf{C}^2 \longrightarrow \mathbf{C}^{\ell-1}$ *una curva, dipendente da un parametro, reale analitica. Definiamo*

$$\begin{aligned} & \Omega_{\rho,r,\bar{\mu}} \equiv \{(I,J,\mu) \in \mathbf{C}^{\ell-1} \times \mathbf{C} \times \mathbf{C} \ \text{tc} \\ & |J| \leq r,\ |\mu| \leq \bar{\mu} \ \text{e} \ \exists J^\sharp, \mu^\sharp,\ |J^\sharp| \leq r,\ |\mu^\sharp| \leq \bar{\mu} \ \text{tc} \ |I - X(J^\sharp;\mu^\sharp)| \leq \rho_0\} \\ & X_J \equiv \sup_{\Omega_{\rho,r,\bar{\mu}}} |\partial_J X| \\ & X_\mu \equiv \sup_{\Omega_{\rho,r,\bar{\mu}}} |\partial_\mu X| \end{aligned}$$

Siano $h(I,J;\mu), f(I,J;\mu) : \mathbf{C}^{\ell-1} \times \mathbf{C} \times \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ *reali analitiche in* $\Omega_{\rho,r,\bar{\mu}}$ *con* $f(I,J;0) = 0$ *e*

$$\sup_{\Omega_{\rho,r,\bar{\mu}}} |f| \leq \theta$$

con θ *opportunamente piccolo. Supponiamo che* $h(X(J;\mu), J;\mu) = E$, $\forall |J| \leq r$ *e* $|\mu| \leq \bar{\mu}$. *Assumiamo che esista una costante* $c > 0$ *tale che,* $\forall (I,J;\mu) \in \Omega_{\rho,r,\bar{\mu}}$ *la matrice*

$$M(I,J;\mu) \equiv \begin{pmatrix} \partial_I^2 h(I,J;\mu) & c\partial_I h(I,J;\mu) \\ c\partial_I h(I,J;\mu) & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(\ell \times \ell)$$

sia invertibile.

[4]Cfr. [C], pag. 132.

Allora nelle vicinanze della curva X esistono e sono uniche due funzioni $Y(J;\mu)$ e $\alpha(J;\mu)$, reali analitiche per $|J| \le r$ e $|\mu| \le \bar\mu$, tali che $Y(J;0) = X(J;0)$, $\alpha(J;0) = 0$ e

$$\begin{aligned} \partial_I h(Y(J;\mu),J;\mu) + \partial_I f(Y(J;\mu),J;\mu) &= \partial_I h(X(J;\mu),J;\mu)\,(1+\alpha(J;\mu)) \\ h(Y(J;\mu),J;\mu) + f(Y(J;\mu),J;\mu) &= E \end{aligned} \qquad \text{(G.15)}$$

Più precisamente: siano

$$\begin{array}{ccc} \sup|\partial_I^2 h| \le A_0 & \sup|M^{-1}| \le B_0 & \sup|\partial_{IJ}^2 h| \le D_0 \\ \sup|\partial_{I\mu}^2 h| \le M_0 & \sup|\partial_\mu \partial_I^2 h| \le M_0' & \sup|\partial_I^3 h| \le D_0' \\ \sup|\partial_J \partial_I^2 h| \le A_0' & \sup|\partial_J h| \le V_0 & \sup|\partial_\mu h| \le Z_0 \end{array}$$

dove il sup *è fatto su $\Omega_{\rho,r,\bar\mu}$, e sia*

$$\rho_0 \le \min\left\{\frac{\rho}{2}, \frac{1}{10\ell B_0(cA_0 + D_0')}\right\}$$

Assumiamo

$$\theta \le \min\left\{\frac{\rho_0^2}{160\ell B_0}, \frac{\rho_0}{40c\ell B_0}\right\}$$

Allora, se $|J| \le r$, $|\mu| \le \bar\mu$ si ha $|Y(J;\mu) - X(J;\mu)| \le \rho_0$ e $|\alpha(J;\mu)| \le c\rho_0$.

DIM. Siano

$$\begin{aligned} r_0 &\le \min\left\{r, \frac{1}{10\ell B_0(A_0' + cA_0X_J + 2cD_0)}, \frac{\rho_0}{8B_0(A_0X_J + cV_0)}\right\} \\ \mu_0 &\le \min\left\{\bar\mu, \frac{1}{10\ell B_0(2cM_0 + M_0' + cA_0X_\mu)}, \frac{\rho_0}{8B_0(A_0X_\mu + cZ_0)}\right\} \end{aligned}$$

Fissiamo J^*, μ^* con $|J^*| \le r$ e $|\mu^*| \le \bar\mu$. Sia

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}(y,a,J,\mu,\sigma) \equiv (\partial_I h(y,J;\mu) - \partial_I h(X(J;\mu),J;\mu)(1-ca)+ \\ &+\sigma\partial_I f(y,J;\mu),\, c\,h(y,J;\mu) + c\,\sigma\, f(y,J;\mu) - c\,E) \end{aligned}$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}(X(J^*;\mu^*),0,J^*,\mu^*,0) = 0 \\ \text{e} \quad &\partial_{(y,a)}\mathcal{F}(X(J^*,\mu^*),0,J^*,\mu^*,0) = M(X(J^*,\mu^*),J^*;\mu^*) \equiv T \end{aligned}$$

Si ha cosí, $\forall |(y - X(J^*, \mu^*), a)| \leq \rho_0$, $|J - J^*| \leq r_0 - |J^*|$, $|\mu - \mu^*| \leq \mu_0 - |\mu^*|$, $|\sigma| \leq 2$:

$$\begin{aligned}
& |\mathcal{F}(X(J^*; \mu^*), 0, J, \mu, \sigma)| = \\
= \; & |\,(\partial_I h(X(J^*; \mu^*), J; \mu) - \partial_I h(X(J; \mu), J; \mu) + \sigma \partial_I f(X(J^*; \mu^*), J; \mu), \\
& c\, h(X(J^*; \mu^*), J; \mu) + c\,\sigma\, f(X(J^*; \mu^*), J; \mu) - c\,E)\,| \overset{(G.14)}{\leq} \\
\leq \; & |\partial_I h(X(J^*; \mu^*), J; \mu) - \partial_I h(X(J; \mu), J; \mu) + \sigma \partial_I f(X(J^*; \mu^*), J; \mu)| + \\
& + c|h(X(J^*; \mu^*), J; \mu) + \sigma\, f(X(J^*; \mu^*), J; \mu) - h(X(J^*; \mu^*), J^*; \mu^*)| \leq \\
\leq \; & A_0\,|X(J^*; \mu^*) - X(J; \mu)| + 2 \sup_{\Omega_{0, r_0, \mu_0}} |\partial_I f| + cV_0 r_0 + cZ_0 \mu_0 + 2c\theta \leq \\
\leq \; & (A_0\, X_J + cV_0)\, r_0 + (A_0\, X_\mu + cZ_0)\, \mu_0 + 2\, \frac{2\theta}{\rho} + 2c\theta \leq \frac{\rho_0}{2B_0}
\end{aligned} \tag{G.16}$$

$$\begin{aligned}
\text{e} \quad & |I - T\partial_{y,a}\mathcal{F}(y, a, J, \mu, \sigma)| \leq \\
\leq \; & |T|\, |\partial_{y,a}\mathcal{F}(X(J^*; \mu^*), 0, J^*, \mu^*, 0) - \partial_{y,a}\mathcal{F}(y, a, J, \mu, \sigma)| \leq \\
\leq \; & \ell B_0 [|\partial_I^2 h(X(J^*; \mu^*), J^*; \mu^*) - \partial_I^2 h(y, J; \mu)| + 2|\partial_I^2 f(y, J; \mu)| + \\
& + c|\partial_I h(X(J^*; \mu^*), J^*; \mu^*) - \partial_I h(X(J; \mu), J; \mu)| + \\
& + c|\partial_I h(X(J^*; \mu^*), J^*; \mu^*) - \partial_I h(y, J; \mu)| + 2c\, |\partial_I f(y, J; \mu)|] \leq \\
\leq \; & \ell B_0 [D_0' \rho_0 + A_0' r_0 + M_0' \mu_0 + 2 \sup_{\Omega_{\rho_0, r_0, \mu_0}} |\partial_I^2 f| + \\
& + cA_0\, |X(J^*; \mu^*) - X(J; \mu)| + \\
& + 2cD_0 r_0 + 2cM_0 \mu_0 + cA_0 \rho_0 + 2c \sup_{\Omega_{\rho_0, r_0, \mu_0}} |\partial_I f|] \leq \\
\leq \; & \ell B_0 [D_0' \rho_0 + A_0' r_0 + M_0' \mu_0 + \frac{16\theta}{\rho^2} + cA_0 X_J r_0 + cA_0 X_\mu \mu_0 + \\
& + 2cD_0 r_0 + 2cM_0 \mu_0 + cA_0 \rho_0 + \frac{4c\theta}{\rho}] \leq \frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{G.17}$$

Dalla (G.16) e dalla (G.17), per il Teorema del Dini[5], ho che $\exists! y(J, \mu, \sigma; J^*; \mu^*)$, $a(J; \mu; \sigma; J^*; \mu^*)$ analitiche per $|J - J^*| \leq r_0 - |J^*|$, $|\mu| \leq \mu_0 - |\mu^*|$, $|\sigma| \leq 2$ tali che

$$\mathcal{F}(y(J, \mu, \sigma; J^*; \mu^*), a(J, \mu, \sigma; J^*; \mu^*), J, \mu, \sigma) = 0$$

con $|Y(J, \mu, \sigma; J^*; \mu^*) - X(J^*; \mu^*)| \leq \rho_0$ e $|a(J, \mu, \sigma; J^*; \mu^*)| \leq \rho_0$.

Si osservi che, $\forall \tilde{J}, \tilde{\mu}$ tali che $|\tilde{J} - J^*| < r_0 - |J^*|$ e $|\tilde{\mu} - \mu^*| < \mu_0 - |\mu^*|$ deve essere

$$y(J; \mu; \sigma; \tilde{J}; \tilde{\mu}) = y(J, \mu, \sigma; J^*; \mu^*)$$

[5]Nella sua formulazione quantitativa: cfr. [C], pag. 132.

$$\text{e} \quad a(J;\mu;\sigma;\tilde{J};\tilde{\mu}) = a(J,\mu,\sigma;J^*;\mu^*) \tag{G.18}$$
$$\forall |J-\tilde{J}| \le r_0 - |J^*| - |\tilde{J}-J^*|,\ |\mu-\tilde{\mu}| \le \mu_0 - |\mu^*| - |\tilde{\mu}-\mu^*|$$

infatti

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}(y(J,\mu,\sigma;\tilde{J};\tilde{\mu}), a(J,\mu,\sigma;\tilde{J};\tilde{\mu}), J,\mu,\sigma) = \\ = \ & \mathcal{F}(y(J,\mu,\sigma;J^*;\mu^*), a(J,\mu,\sigma;J^*;\mu^*), J,\mu,\sigma) = 0 \end{aligned}$$

per l'asserto di unicità del Teorema del Dini[6] segue (G.18).

Per cui, scrivendo, per compattezza

$$\begin{aligned} & \{(J,\mu) \ \text{tc} \ |J| \le r,\ |\mu| \le \bar{\mu}\} \subseteq \\ & \subseteq \bigcup_{i=1}^{\nu} \{(J,\mu) \ \text{tc} \ |J-J_i| \le r_0 - |J_i|,\ |\mu-\mu_i| \le \mu_0 - |\mu_i|\} \end{aligned}$$

Definisco:

$$\begin{aligned} y(J;\mu;\sigma) &\equiv y(J;\mu;\sigma;J_i;\mu_i) \qquad \text{se } |J-J_i| \le r_0 - |J_i|,\ |\mu-\mu_i| \le \mu_0 - |\mu_i| \\ a(J;\mu;\sigma) &\equiv a(J;\mu;\sigma;J_i;\mu_i) \qquad \text{se } |J-J_i| \le r_0 - |J_i|,\ |\mu-\mu_i| \le \mu_0 - |\mu_i| \end{aligned}$$

Tale definizione è ben posta in virtù della (G.18) e per costruzione si ha

$$\mathcal{F}(y(J;\mu;\sigma), a(J;\mu;\sigma), J,\mu,\sigma) = 0$$

La dimostrazione termina quindi ponendo $Y(J;\mu) \equiv y(J;\mu;1)$ e $\alpha(J;\mu) \equiv -ca(J;\mu;1)$. □

Lemma G.15 *Sia $K \subset \mathbf{C}^N$ un insieme compatto. Denotiamo con*

$$K_a \equiv \bigcup_{x\in K} B_a(x)$$

Fissati $R > r > 0$, si può costruire una funzione $\tau \in \mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^N) \cap \mathrm{C}(\mathbf{C}^N)$, $\tau : \mathbf{C}^N \longrightarrow \mathbf{C}$ tale che

$$\begin{aligned} & \operatorname{supp}\tau \subseteq K_R \\ & \tau(x) = 1\,,\ \forall x \in K_r \\ & \sup_{\mathbf{R}^N} |\partial^\alpha \tau| \le (\kappa\,|\alpha|)!\left(\frac{R}{R^2-r^2}\right)^{|\alpha|} \end{aligned}$$

essendo $\kappa \ge 1$ una costante opportuna.

[6]Cfr. Osservazione 7.3 a pag. 134 di [C].

DIM. Definiamo

$$G(t) \equiv \begin{cases} 0 & \text{se } t \le 0 \\ \exp\left(-\dfrac{1}{t^2}\right) & \text{se } t > 0 \end{cases} \qquad t \in \mathbf{R}$$

Dall' esercizio 3 di pag. 73 di [FJ] ho che esiste una costante $A > 1$ tale che

$$\sup_{t\in\mathbf{R}} \left| \frac{d^k G}{dt^k}(t) \right| \le A^k \, (k!)^{3/2} \tag{G.19}$$

Sia poi $G_0(t) \equiv G(t)\, G(1-t)$: per costruzione $G_0 \in \mathrm{C}^\infty(\mathbf{R})$ e $\operatorname{supp} G_0 = [0,1]$. E poi[7], $\forall 0 < \sigma \in \mathbf{R}$:

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{0\le i,j\le k\\ i+j=k}} (i!\, j!)^\sigma \le \sum_{\substack{0\le i,j\le k\\ i+j=k}} \left(\frac{i^i}{2^{i-1}} \frac{j^j}{2^{j-1}} \right)^\sigma \le \\ \le \quad & \sum_{\substack{0\le i,j\le k\\ i+j=k}} \left(\frac{k^i\, k^j}{2^{k-2}} \right)^\sigma \le \left(\frac{k^k}{2^{k-2}} \right)^\sigma \cdot \#\{i+j=k\} \overset{\text{Lemma G.1}}{\le} \\ \le \quad & (k!)^\sigma \left(\frac{e^k}{2^{k-2}} \right)^\sigma \cdot 4k \end{aligned} \tag{G.20}$$

Abbiamo cosí[8], per un'opportuna costante M:

$$\begin{aligned} & \sup_{t\in\mathbf{R}} \left| \frac{d^k G_0}{dt^k}(t) \right| = \sup_{t\in\mathbf{R}} \left| \sum_{i+j=k} \binom{k}{i} (-1)^j \frac{d^i G}{dt^i}(t) \, \frac{d^j G}{dt^j}(1-t) \right| \le \\ \le \quad & A^k \sum_{i+j=k} \binom{k}{i} (i!\, j!)^{3/2} = \\ = \quad & A^k\, k! \sum_{i+j=k} (i!\, j!)^{1/2} \overset{(G.20)}{\le} M^k \, (k!)^{3/2} \end{aligned}$$

Definiamo perciò

$$c \equiv \int_0^1 G_0(s)\, ds \qquad\qquad G_1(t) \equiv c^{-1} \int_{-\infty}^t G_0(s)\, ds$$

---

[7]Usando che

$$\frac{n^n}{e^n} \le n! \le 2\frac{n^n}{2^n}$$

[8]Cfr. [FJ], esercizio 5, pag. 55.

Per costruzione, $0 \le G_1(t) \le 1$, $G_1(t) = 0\ \forall t \le 0$ e $G_1(t) = 1\ \forall t \ge 1$. E

$$\sup_{t\in\mathbf{R}} \left| \frac{d^k G_1}{dt^k}(t) \right| = c^{-1} \sup_{t\in\mathbf{R}} \left| \frac{d^{k-1} G_0}{dt^{k-1}}(t) \right| \le c^{-1} M^{k-1} \left((k-1)!\right)^{3/2}$$

Inoltre[9]

$$\begin{aligned} & \sup_{t\in\mathbf{R}} \left| \frac{d^k}{dt^k} \left(G_1 \left(\frac{R^2 \pm t}{R^2 - r^2} \right) \right) \right| \le \\ \le \quad & \sup_{t\in\mathbf{R}} \left| \frac{d^k G_1}{dt^k} \left(\frac{R^2 \pm t}{R^2 - r^2} \right) \cdot (R^2 - r^2)^{-k} \right| \le \\ \le \quad & c^{-1} M^{k-1} \left((k-1)!\right)^{3/2} (R^2 - r^2)^{-k} \end{aligned}$$

Sia anche

$$G_2(t) \equiv G_1 \left(\frac{R^2 - t}{R^2 - r^2} \right) \cdot G_1 \left(\frac{R^2 + t}{R^2 - r^2} \right)$$

otteniamo $0 \le G_2(t) \le 1$, $G_2(t) = 0\ \forall |t| \ge R^2$ $G_2(t) = 1\ \forall |t| \le r$. Si ha:

$$\begin{aligned} & \sup_{t\in\mathbf{R}} \left| \frac{d^k}{dt^k} G_2(t) \right| = \\ = \quad & \sup_{t\in\mathbf{R}} \left| \sum_{i+j=k} \binom{k}{j} \frac{d^i}{dt^i} \left(G_1 \left(\frac{R^2 - t}{R^2 - r^2} \right) \right) \cdot \frac{d^j}{dt^j} \left(G_1 \left(\frac{R^2 + t}{R^2 - r^2} \right) \right) \right| \le \\ \le \quad & c^{-2} M^{k-2} (R^2 - r^2)^{-k} \sum_{i+j=k} \binom{k}{j} \left((i-1)!\,(j-1)!\right)^{3/2} \le \\ \le \quad & c^{-2} M^{k-2} (R^2 - r^2)^{-k}\, k! \sum_{i+j=k} (i!\,j!)^{1/2} \overset{(G.20)}{\le} \\ \le \quad & C^k (R^2 - r^2)^{-k} (k!)^{3/2} \end{aligned} \tag{G.21}$$

essendo $C > 1$ un'opportuna costante. Definiamo allora $g_0(x) \equiv G_2(|x|^2)$. Per costruzione: $g_0 \in \mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^N) \cap \mathrm{C}(\mathbf{C}^N)$, $0 \le g_0(x) \le 1\ \forall x \in \mathbf{R}^N$, $g_0(x) = 1$ se $|x| \le r$ e $g_0(x) = 0$ se $|x| \ge R$. Inoltre, $\forall F(t) \in \mathrm{C}^\infty(\mathbf{R})$ si ha:

$$\partial_x^\alpha \left(F(|x|^2) \right) = \sum_{\substack{0 \le n_1 \le \alpha_1/2 \\ \vdots \\ 0 \le n_N \le \alpha_N/2}} c^{(\alpha)}_{\alpha-2n} \left. \frac{d^{|\alpha|-|n|} F}{dt^{|\alpha|-|n|}} \right|_{t=|x|^2} x^{\alpha-2n}$$

$$\text{con} \qquad |c^{(\alpha)}_{\alpha-2n}| \le (|\alpha| + 5)! \tag{G.22}$$

[9]Cfr. [FJ], esercizio 7, pag. 56.

La (G.22) si verifica per induzione:

$$\partial_x^{\alpha+e_1}\left(F(|x|^2)\right) = \partial_{x_1}[\sum_{\substack{0\le n_1\le\alpha_1/2\\ \vdots\\ 0\le n_N\le\alpha_N/2}} c^{(\alpha)}_{\alpha-2n}\left.\frac{d^{|\alpha|-|n|}F}{dt^{|\alpha|-|n|}}\right|_{t=|x|^2} x^{\alpha-2n}] =$$

$$\sum_{\substack{0\le n_1\le\alpha_1/2\\ \vdots\\ 0\le n_N\le\alpha_N/2}} c^{(\alpha)}_{\alpha-2n}\left.\frac{d^{|\alpha|-|n|+1}F}{dt^{|\alpha|-|n|}}\right|_{t=|x|^2} 2x_1\, x^{\alpha-2n}+$$

$$+\sum_{\substack{0\le n_1\le\alpha_1/2\\ \vdots\\ 0\le n_N\le\alpha_N/2}} c^{(\alpha)}_{\alpha-2n}\left.\frac{d^{|\alpha|-|n|}F}{dt^{|\alpha|-|n|}}\right|_{t=|x|^2} (\alpha_1-2n_1)x^{\alpha-2n-e_1} =$$

$$\sum_{\substack{0\le n_1\le\alpha_1/2\\ \vdots\\ 0\le n_N\le\alpha_N/2}} 2c^{(\alpha)}_{\alpha-2n}\left.\frac{d^{|\alpha|-|n|+1}F}{dt^{|\alpha|-|n|+1}}\right|_{t=|x|^2} x^{\alpha+e_1-2n}+$$

$$+\sum_{\substack{1\le m_1\le\alpha_1/2+1\\ 0\le m_2\le\alpha_2/2\\ \vdots\\ 0\le m_N\le\alpha_N/2}} c^{(\alpha)}_{\alpha+2e_1-2m}\left.\frac{d^{|\alpha|-|m|+1}F}{dt^{|\alpha|-|m|+1}}\right|_{t=|x|^2} (\alpha_1+2-2m_1)x^{\alpha-2m+e_1} =$$

$$\sum_{\substack{0\le n_1\le\alpha_1/2\\ \vdots\\ 0\le n_N\le\alpha_N/2}} 2c^{(\alpha)}_{\alpha-2n}\left.\frac{d^{|\alpha+e_1|-|n|}F}{dt^{|\alpha+e_1|-|n|}}\right|_{t=|x|^2} x^{\alpha+e_1-2n}+$$

$$+\sum_{\substack{1\le m_1\le(\alpha_1+1)/2\\ 0\le m_2\le\alpha_2/2\\ \vdots\\ 0\le m_N\le\alpha_N/2}} c^{(\alpha)}_{\alpha+2e_1-2m}\left.\frac{d^{|\alpha+e_1|-|m|}F}{dt^{|\alpha+e_1|-|m|}}\right|_{t=|x|^2} (\alpha_1+2-2m_1)x^{\alpha+e_1-2m}$$

da cui (definendo $c^{(\alpha)}_{\alpha+2e_1-2m}\equiv 0$ se $m_1=0$):

$$c^{(\alpha+e_1)}_{\alpha+e_1-2n} = 2c^{(\alpha)}_{\alpha-2n} + (\alpha_1+2-2n_1)c^{(\alpha)}_{\alpha+2e_1-2n}$$

che prova la prima delle (G.22). Inoltre:

$$|c^{(\alpha+e_1)}_{\alpha+e_1-2n}| \le 2|c^{(\alpha)}_{\alpha-2n}| + |\alpha_1+2-2n_1|\; |c^{(\alpha)}_{\alpha+2e_1-2n}| \le$$

$$
\begin{aligned}
&\leq\ 2(|\alpha|+5)!+(|\alpha|+2-2|n|)\,(|\alpha|+5)! = (|\alpha|+5)!\,(|\alpha|+4-2|n|) \leq \\
&\leq\ (|\alpha|+5)!\,(|\alpha|+4) \leq (|\alpha|+6)! = (|\alpha+e_1|+5)!
\end{aligned}
$$

dimostra la seconda delle (G.22). Da tale relazione, ricordando la (G.21):

$$
\begin{aligned}
\sup_{x\in\mathbf{R}^N} |\partial^\alpha g_0(x)| \leq & \sum_{\substack{0\,\leq\,n_1\,\leq\,\alpha_1/2 \\ \vdots \\ 0\,\leq\,n_N\,\leq\,\alpha_N/2}} c^{(\alpha)}_{\alpha-2n}\,(|\alpha|+5)!\,C^{|\alpha|-|n|}\cdot \\
& \cdot (R^2-r^2)^{|n|-|\alpha|}\,((|\alpha|-|n|)!)^{3/2}\ R^{|\alpha|-2|n|} \leq \\
\leq\ & (|\alpha|+5)!\,C^{|\alpha|}\,(R^2-r^2)^{-|\alpha|}\,(|\alpha|!)^{3/2}\,R^{|\alpha|}\sum_{n\in\mathbf{N}^N}\left(\frac{R^2-r^2}{CR^2}\right) \leq \\
\leq\ & ((|\alpha|+5)!)^{5/2}\ C^{|\alpha|}\,(R^2-r^2)^{-|\alpha|}R^{|\alpha|}\left(\frac{CR^2}{(C-1)R^2+r^2}\right)^N \leq \\
\leq\ & ((|\alpha|+5)!)^{5/2}\ \left(\frac{CR}{R^2-r^2}\right)^{|\alpha|}\ \left(\frac{C}{C-1}\right)^N
\end{aligned}
\tag{G.23}
$$

Fissato $\bar{x}\in\mathbf{R}^N$, la funzione $g_{\bar{x}}(x)\equiv g_0(x-\bar{x})$ verifica: $g_{\bar{x}}\in \mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^N)\cap \mathrm{C}(\mathbf{C}^N)$, $0\leq g_{\bar{x}}(x)\leq 1$ $\forall x\in\mathbf{R}^N$, $g_{\bar{x}}(x)=1$ se $|x-\bar{x}|\leq r$, $g_{\bar{x}}(x)=0$ se $|x-\bar{x}|\geq R$ e

$$
\begin{aligned}
\sup_{x\in\mathbf{R}^N} \quad & |\partial^\alpha g_{\bar{x}}(x)| \leq ((|\alpha|+5)!)^{5/2}\ \left(\frac{CR}{R^2-r^2}\right)^{|\alpha|}\ \left(\frac{C}{C-1}\right)^N \leq \\
\leq\ & (\kappa_1\,|\alpha|)!\ \left(\frac{R}{R^2-r^2}\right)^{|\alpha|}
\end{aligned}
\tag{G.24}
$$

essendo κ_1 una costante opportuna.

Per compattezza posso scrivere

$$
K\subseteq\bigcup_{i=1}^m B_r(x_i) \tag{G.25}
$$

Definiamo perciò

$$
\begin{aligned}
\tau_1(x) &\equiv g_{x_1}(x) \\
\tau_2(x) &\equiv (1-\tau_1(x))\cdot g_{x_2}(x) \\
&\ \,\vdots \\
\tau_m(x) &\equiv (1-\tau_1(x))\cdot\ldots\cdot(1-\tau_{m-1}(x))\cdot g_{x_m}(x)
\end{aligned}
$$

Se $x \notin K_R$, per costruzione $g_{x_i}(x) = 0\ \forall 1 \leq i \leq m$, da cui

$$\forall x \notin K_R\,,\ \ \tau_i(x) = 0\,,\ \ \forall 1 \leq i \leq m \tag{G.26}$$

Poi, in virtù di (G.25) abbiamo che se $x \in K_r$ deve esistere i, $1 \leq i \leq n$ tale che $x \notin B_r(x_j)\ \forall 1 \leq j \leq i-1$ e $x \in B_r(x_i)$. Da ciò $\tau_j(x) = 0\ \forall 1 \leq j \leq i-1$, $\tau_i(x) = 1$, e $\tau_k(x) = 0\ \forall i+1 \leq k \leq m$. Quindi

$$\forall x \in K_r\,,\ \ \exists i\ \ \text{tc}\ \ \tau_i(x) = 1\ \ \text{e}\ \ \tau_j(x) = 0\ \ \forall j \neq i \tag{G.27}$$

Perciò, ponendo

$$\tau(x) \equiv \sum_{i=1}^{m} \tau_i(x)$$

si ha che $\tau \in \mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^N) \cap \mathrm{C}(\mathbf{C}^N)$ e, $\forall x \notin K_R$, $\tau(x) \overset{(G.26)}{=} 0$. E $\forall x \in K_r$: $\tau(x) \overset{(G.27)}{=} 1$.

Infine: si vede, per induzione su ν, che $\forall 1 \leq \nu \leq m$

$$\sum_{i=1}^{\nu} \tau_i = 1 - \prod_{i=1}^{\nu}(1 - g_{x_i}) \tag{G.28}$$

E, facendo induzione su k, si dimostra che

$$\partial_x^\beta \left(F_1(x) \cdot \ldots \cdot F_k(x)\right) = \tag{G.29}$$

$$= \sum_{\substack{\beta^{(1,1)} + \beta^{(1,2)} = \beta \\ \beta^{(2,1)} + \beta^{(2,2)} = \beta^{(1,1)} \\ \vdots \\ \beta^{(k-1,1)} + \beta^{(k-1,2)} = \beta^{(k-2,1)}}} \frac{(\beta^{(1,1)} + \beta^{(1,2)})!}{\beta^{(1,1)}!\,\beta^{(1,2)}!} \cdot \ldots \cdot \frac{(\beta^{(k-1,1)} + \beta^{(k-1,2)})!}{\beta^{(k-1,1)}!\,\beta^{(k-1,2)}!} \cdot$$

$$\cdot \partial_x^{\beta^{(k-1,1)}} F_1 \cdot \partial_x^{\beta^{(k-1,2)}} F_2 \cdot \partial_x^{\beta^{(k-2,2)}} F_3 \cdot \ldots \cdot \partial_x^{\beta^{(k-j,2)}} F_{j+1} \cdot \ldots \cdot \partial_x^{\beta^{(1,2)}} F_k$$

In questo modo:

$$|\partial_x^\beta \tau| \overset{(G.28)}{=} |\partial_x^\beta \prod_{i=1}^{m}(1 - g_{x_i})| \overset{(G.29)}{=}$$

$$= \sum_{\substack{\beta^{(1,1)} + \beta^{(1,2)} = \beta \\ \beta^{(2,1)} + \beta^{(2,2)} = \beta^{(1,1)} \\ \vdots \\ \beta^{(m-1,1)} + \beta^{(m-1,2)} = \beta^{(m-2,1)}}} \frac{(\beta^{(1,1)} + \beta^{(1,2)})!}{\beta^{(1,1)}!\,\beta^{(1,2)}!} \cdot \ldots \cdot \frac{(\beta^{(m-1,1)} + \beta^{(m-1,2)})!}{\beta^{(m-1,1)}!\,\beta^{(m-1,2)}!} \cdot$$

$$\cdot \partial_x^{\beta^{(m-1,1)}} g_{x_1} \cdot \partial_x^{\beta^{(m-1,2)}} g_{x_2} \cdot \partial_x^{\beta^{(m-2,2)}} g_{x_3} \cdot \ldots \cdot \partial_x^{\beta^{(1,2)}} g_{x_m} \leq$$

$$\leq \sum_{\substack{\beta^{(1,1)} + \beta^{(1,2)} = \beta \\ \beta^{(2,1)} + \beta^{(2,2)} = \beta^{(1,1)} \\ \vdots \\ \beta^{(m-1,1)} + \beta^{(m-1,2)} = \beta^{(m-2,1)}}} \frac{(\beta^{(1,1)} + \beta^{(1,2)})!}{\beta^{(1,1)}!\, \beta^{(1,2)}!} \cdot \ldots \cdot \frac{(\beta^{(m-1,1)} + \beta^{(m-1,2)})!}{\beta^{(m-1,1)}!\, \beta^{(m-1,2)}!} \cdot$$

$$\cdot (\kappa_1 |\beta^{(m-1,1)}|)! (\kappa_1 |\beta^{(m-1,2)}|)! \ldots (\kappa_1 |\beta^{(1,2)}|)! \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{R}{R^2 - r^2}\right)^{|\beta^{(m-1,1)}| + |\beta^{(m-1,2)}| + \ldots + |\beta^{(1,2)}|} =$$

$$= \left(\frac{R}{R^2 - r^2}\right)^{|\beta|} \cdot$$

$$\cdot \sum_{\substack{\beta^{(1,1)} + \beta^{(1,2)} = \beta \\ \beta^{(2,1)} + \beta^{(2,2)} = \beta^{(1,1)} \\ \vdots \\ \beta^{(m-1,1)} + \beta^{(m-1,2)} = \beta^{(m-2,1)}}} \frac{(\beta^{(1,1)} + \beta^{(1,2)})!}{\beta^{(1,1)}!\, \beta^{(1,2)}!} \cdot \ldots \cdot \frac{(\beta^{(m-1,1)} + \beta^{(m-1,2)})!}{\beta^{(m-1,1)}!\, \beta^{(m-1,2)}!} \cdot$$

$$\cdot (\kappa_1 |\beta^{(m-1,1)}|)! \, (\kappa_1 |\beta^{(m-1,2)}|)! \ldots (\kappa_1 |\beta^{(1,2)}|)! \leq$$

$$\leq \left(\frac{R}{R^2 - r^2}\right)^{|\beta|} (\kappa_1 |\beta|)! \cdot$$

$$\cdot \sum_{\substack{\beta^{(1,1)} + \beta^{(1,2)} = \beta \\ \beta^{(2,1)} + \beta^{(2,2)} = \beta^{(1,1)} \\ \vdots \\ \beta^{(m-1,1)} + \beta^{(m-1,2)} = \beta^{(m-2,1)}}} \frac{(\beta^{(1,1)} + \beta^{(1,2)})!}{\beta^{(1,1)}!\, \beta^{(1,2)}!} \cdot \ldots \cdot \frac{(\beta^{(m-1,1)} + \beta^{(m-1,2)})!}{\beta^{(m-1,1)}!\, \beta^{(m-1,2)}!} =$$

$$= \left(\frac{R}{R^2 - r^2}\right)^{|\beta|} (\kappa_1 |\beta|)! \cdot$$

$$\cdot \sum_{\substack{\beta^{(1,1)}+\beta^{(1,2)}=\beta \\ \beta^{(2,1)}+\beta^{(2,2)}=\beta^{(1,1)} \\ \vdots \\ \beta^{(m-1,1)}+\beta^{(m-1,2)}=\beta^{(m-2,1)}}} \frac{\beta!}{\beta^{m-1,1}!} \frac{1}{\beta^{(1,2)}! \ \ldots \ \beta^{(m-1,2)}!} \leq$$

$$\leq \left(\frac{R}{R^2-r^2}\right)^{|\beta|} (\kappa_1 |\beta|)! \, \beta! \sum_{\substack{\beta^{(1,1)}+\beta^{(1,2)}=\beta \\ \beta^{(2,1)}+\beta^{(2,2)}=\beta^{(1,1)} \\ \vdots \\ \beta^{(m-1,1)}+\beta^{(m-1,2)}=\beta^{(m-2,1)}}} 1 \overset{\text{Lemma G.1}}{\leq}$$

$$\leq \left(\frac{R}{R^2-r^2}\right)^{|\beta|} (\kappa_1 |\beta|)! \, \beta! \cdot 2^{(m-1)N}$$

Ciò prova la tesi, scegliendo opportunamente κ. $\square$

BIBLIOGRAFIA

[AP] Ambrosetti, A. – Prodi, G. *A Primer of Nonlinear Analysis*, Cambridge, Cambridge University Press, 1993.

[A63] Arnol'd, V.I. "Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics" in Russian Mathematical Survey 18, 1963.

[A64] Arnol'd, V.I. "Instability of Dynamical Systems with several degrees of freedom" in Soviet Mathematics – Doklady 5, 1964.

[ARN] Arnol'd, V.I. *Metodi matematici della meccanica classica*, Roma, Editori Riuniti, 1979.

[ED3] Arnol'd, V.I. ed. *Dynamical Systems III*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 3, New York, Springer–Verlag, 1985.

[BOT] Bott, R. – Tu, L.W. *Differential Forms in Algebraic Topology*, New York, Springer, 1982.

[CTP] Celletti, A. – Perozzi, E. *Meccanica celeste*, Napoli, CUEN, 1996.

[CC96] Celletti, A. – Chierchia, L. "On the stability of realistic three-body problems" preprint, 1996.

[C90] Chierchia, L. "A direct method for constructing solutions of Hamilton-Jacobi Equation" in Meccanica, 25, 1990.

[C94] Chierchia, L. "Arnold Instability for Nearly-integrable Hamiltonian Systems" in Proceedings of the Workshop – Variational and Local Methods in the study of Hamiltonian Systems, International Centre of Theoretical Physics, Trieste, Ottobre 1994. London, World Scientific.

[C] Chierchia, L. *Lezioni di Analisi matematica 2*, Roma, Aracne, 1996.

[CF94] Chierchia, L. – Falcolini, C. "A Direct Proof of a Theorem by Kolmogorov in Hamiltonian Systems" in Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, serie IV, vol. XXI, 1994.

[CG94] Chierchia, L. – Gallavotti, G. "Drift and diffusion in phase space" in Ann. Inst. H. Poincare', 60, 1994.

[CP95] Chierchia, L. – Perfetti, P. "Second Order Hamiltonian Equations on $\mathbf{T}^\infty$ and Almost-Periodic Solutions" in Journal of Differential Equations, vol. 116, 1, 1995.

[JC97] Cresson, J. "A λ-lemma for partially hyperbolic tori and the obstruction property" preprint, 1997.

[EA81] Easton, R.W. "Orbit structure near trajectories biasymptotic to invariant tori" in Classical Mechanics and Dynamical Systems, 70, 1981.

[FM] Fasano, A. – Marmi, S. *Meccanica analitica*,

Torino, Boringhieri, 1994.
[FON] Fontana, M. – Gabelli, S. *Insiemi, numeri e polinomi*, Roma, Cisu, 1989.
[GAL] Gallavotti, G. *Meccanica elementare*, Torino, Boringhieri, 1986.
[GH] Greenberg, M.J. – Harper, J.R. *Algebraic Topology: A First Course*, USA, Addison–Wesley Publishing Company, 1981.
[HW] Hardy, G.H. – Wright, E.M. *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford, Clarendon Press, 1979.
[FJ] John, F. *Partial Differential Equations*, New York, Springer–Verlag, 1982.
[DAU] Landau, L.D. – Lifšits, E.M. *Meccanica*, Roma, Editori Riuniti, 1994.
[MA96] Marco, J.P. "Transition le long des chaînes de tores invariants pour les systemes hamiltoniens analytiques" in Ann. Inst. H. Poincare', 64, 1996.
[M56] Moser, J. "The Analytic Invariants of an Area-Preserving Mapping near a Hyperbolic Fixed Point" in Communications on Pure and Applied Mathematics, vol. IX, 1956.
[M78] Moser, J. "Is the Solar System Stable?" in Mathematical Intelligencer, 1, 1978.
[N82] Neishtadt, A.I. "Estimates in the Kolmogorov Theorem on Conservation of Conditionally Periodic Motions" in Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 45, 6, 1982.
[P82] Pöschel, J. "Integrability of Hamiltonian Systems on Cantor Sets" in Communications on Pure and Applied Mathematics, vol. 35, 1982.
[RW97] Rudnev, M. – Wiggins, S. "KAM Theory Near Multiplicity One Resonant Surfaces" in Journal of Nonlinear Science, 7, 1997.
[S1] Sernesi, E. *Geometria 1*, Torino, Boringhieri, 1989.
[S42] Siegel, C.L. "Iteration of Analytic Functions" in Annals of Mathematics, vol. 43, 4, 1942.
[SM] Siegel, C.L. – Moser, J. *Lectures on Celestial Mechanics*, New York, Springer–Verlag, 1971.
[T91] Treshchev, D.V. "The mechanism of destruction of resonance tori of Hamiltonian Systems" in Math. USSR Sbornik, 68, 1991.

ERRATA CORRIGE DELL'APPENDICE C "Esempio di una serie che converge quasi ovunque, ma diverge su un insieme denso"

Proposizione G.16 *Siano $\tau > N$ e $\gamma < R$ fissati. Definiamo*

$$\mathcal{D} \equiv \left\{ \omega \in \mathbf{R}^N ,\ |\omega| \le R \text{ tc } |\omega \cdot n - m| \ge \frac{\gamma}{|n|^\tau} \ \forall n \in \mathbf{Z}^N - \{0\} \text{ e } m \in \mathbf{Z} \right\}$$

Allora $\operatorname{mis} \mathcal{D}^C \le c_N \, R^N \, \gamma$, *per un'opportuna costante c_N.*

DIM. Poniamo, fissati $n \in \mathbf{Z}^N - \{0\}$ e $m \in \mathbf{Z}$,

$$\mathcal{A}_{n,m} \equiv \left\{ \omega \in \mathbf{R}^N ,\ |\omega| \le R \text{ tc } |\omega \cdot n - m| < \frac{\gamma}{|n|^\tau} \right\}$$

cosí che

$$\mathcal{D}^C = \bigcup_{n \in \mathbf{Z}^N - \{0\},\, m \in \mathbf{Z}} \mathcal{A}_{n,m}$$

Se $|m| \ge 2R\,|n|$, si ha

$$|\omega \cdot n - m| \ge |m| - R\,|n| \ge R\,|n| \ge R > \gamma \ge \frac{\gamma}{|n|^\tau}$$

quindi $\mathcal{A}_{n,m} = \emptyset$ se $|m| \ge 2R\,|n|$.

Se invece $|m| < 2R\,|n|$,

$$\begin{aligned} \operatorname{mis} \mathcal{A}_{n,m} &= \left\{ \omega \in \mathbf{R}^N ,\ |\omega| \le R \text{ tc } |\omega \cdot \frac{n}{|n|} - \frac{m}{|n|}| < \frac{\gamma}{|n|^{\tau+1}} \right\} \le \\ &\le \Omega_{N-1}\, R^{N-1} \cdot \frac{2\gamma}{|n|^{\tau+1}} \end{aligned}$$

essendo $\Omega_0 \equiv 2$ e $\Omega_k\, R^k$ la misura della palla $k-$dimensionale per $k \ge 2$. Quindi

$$\begin{aligned} \operatorname{mis} \mathcal{D}^C &\le \sum_{n \in \mathbf{Z}^N - \{0\},\, m \in \mathbf{Z},\, |m| < 2R\,|n|} \operatorname{mis} \mathcal{A}_{n,m} \le \\ &\le \sum_{n \in \mathbf{Z}^N - \{0\},\, m \in \mathbf{Z},\, |m| < 2R\,|n|} \Omega_{N-1}\, R^{N-1} \cdot \frac{2\gamma}{|n|^{\tau+1}} \le \\ &\le \sum_{n \in \mathbf{Z}^N - \{0\}} \frac{4\gamma\, R^N\, \Omega_{N-1}}{|n|^\tau} \end{aligned}$$

che prova l'asserto con $c_N \equiv 4\Omega_{N-1} \cdot \sum_{n\in\mathbf{Z}^N-\{0\}} \frac{1}{|n|^\tau}$. $\square$

Corollario G.17 *Sia $\tau > N$ fissato. Definiamo*

$$\mathcal{D}^\star \equiv \left\{\omega \in \mathbf{R}^N \ \text{ tc } \ \exists\gamma > 0 \ \text{ tc } \ |\omega \cdot n - m| \geq \frac{\gamma}{|n|^\tau} \ \ \forall n \in \mathbf{Z}^N - \{0\} \ \text{ e } \ m \in \mathbf{Z}\right\}$$

Allora mis $(\mathcal{D}^\star)^C = 0$.

DIM. Posto

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{R,\gamma} \quad = \quad & \big\{\omega \in \mathbf{R}^N, \ |\omega| \leq R, \text{ tc } \exists n \in \mathbf{Z}^N - \{0\} \text{ e } m \in \mathbf{Z} \text{ tc} \\ & |\omega \cdot n - m| < \frac{\gamma}{|n|^\tau}\bigg\}\end{aligned}$$

abbiamo, dalla Proposizione precedente che, se $\gamma < R$, $\operatorname{mis}\mathcal{E}_{R,\gamma} \leq c_N\, R^N \gamma$. Per cui, ponendo $(\mathcal{D}^\star)^C_R \equiv (\mathcal{D}^\star)^C \cap B_R(0)$ e notando che $(\mathcal{D}^\star)^C_R = \bigcap_{\gamma>0} \mathcal{E}_{R,\gamma}$ ho che

$$\text{mis } (\mathcal{D}^\star)^C_R \leq \lim_{\gamma\to 0} \operatorname{mis}\mathcal{E}_{R,\gamma} = 0$$

cioè $(\mathcal{D}^\star)^C_R$ è di misura nulla $\forall R$. Poichè $(\mathcal{D}^\star)^C = \bigcup_{R\in\mathbf{Q},\, R>0} (\mathcal{D}^\star)^C_R$, anche $(\mathcal{D}^\star)^C$ è di misura nulla. $\square$

Teorema G.18 *La serie*

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} (\cos nx)^{n^5}$$

converge quasi ovunque, ma diverge su un insieme denso.

DIM. Sia $y \equiv x/\pi$ tale che

$$|ny - m| \geq \frac{\gamma}{n^2} \ \ \forall n \in \mathbf{Z} - \{0\},\, m \in \mathbf{Z}$$

Per il risultato precedente, ho che x varia in un insieme di misura piena.

Certo $\cos\theta \leq 1 - \theta^2/4$ per $|\theta|$ più piccolo di un θ_0 opportuno. Inoltre, poichè $(1 - \gamma^2\pi^2/4z^4)^{z^4} \xrightarrow{z\to+\infty} e^{-\gamma^2\pi^2/4} < 1$ si ha che $\exists z_0 > 0$ e $c > 1$ tale che $(1-\gamma^2\pi^2/4z^4)^{z^4} \leq 1/c$ se $z \geq z_0$. Per cui, se $n > \max\{\sqrt{\gamma\pi/\theta_0},\, z_0\}$,

$$\left|(\cos nx)^{n^5}\right| \leq \left(\cos\frac{\gamma\pi}{n^2}\right)^{n^5} \leq \left(1 - \frac{\gamma^2\pi^2}{4n^4}\right)^{n^5} \leq \frac{1}{c^n}$$

che mostra la convergenza della serie.

Supponiamo invece $x \in \pi\mathbf{Q}$: se $x = k\pi/h$ si ha, $\forall j \in \mathbf{N}$, $\cos 2jhx = 1$. Per cui non è verificata la condizione necessaria alla convergenza. $\square$