Università degli Studi di Milano

Facoltà di Scienze e Tecnologie
Corso di Laurea Triennale in Matematica

UN INTEGRALE ASTRATTO DI GAUGE

Relatore:
Prof. Libor VESELY

Elaborato finale di:
Roberto COLOMBONI
Matricola 724452

Anno Accademico 2012–2013

Indice

Introduzione

Gli integrali di McShane e di Henstock in $\mathbb{R}^n$ si basano sulla nozione di gauge e di partizione puntata. Entrambe le nozioni sono profondamente legate alla struttura geometrica del dominio. Di conseguenza, fin dalla definizione, è chiaro che questi integrali differiscono concettualmente in maniera profonda dall'integrale di Lebesgue che, invece, ha come unica richiesta sul dominio che sia uno spazio di misura. Inoltre, proprio in virtù del fatto che l'integrale di Henstock in $\mathbb{R}$ tiene in considerazione la geometria del dominio, in tale contesto vale il secondo teorema fondamentale del calcolo, che connette la nozione geometrica di derivabilità con la nozione di integrabilità: la derivata di ogni funzione derivabile è Henstock integrabile e ogni funzione integrale della derivata differisce per una costante dalla funzione di partenza. Giacché l'integrale di McShane è equivalente all'integrale di Lebesgue (si veda [Gor94]), il secondo teorema fondamentale del calcolo, non valendo in tale piena generalità per l'integrale di Lebesgue, cessa di valere per l'integrale di McShane. Tuttavia, dal momento che anche l'integrale di McShane tiene in considerazione la struttura geometrica del dominio, questa situazione può sembrare assai singolare.

Scopo di questo lavoro è, da un lato, di proporre e sviluppare una teoria assiomatica dell'integrazione che si fondi su quelle proprietà geometriche di $\mathbb{R}^n$ che permettono all'integrale di McShane e di Henstock di funzionare, prendendo queste come assiomi e permettendo quindi di svincolarsi dall'ambito euclideo; dall'altro, di sviluppare in tale contesto astratto una teoria della derivazione in maniera tale che valga sempre il secondo teorema fondamentale del calcolo. Naturalmente, come in ogni teoria dell'integrazione che si rispetti, mostreremo che in tale contesto valgono le classiche proprietà dell'integrale e anche i teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale, responsabili del successo dell'integrale di Lebesgue.

A tale procedura di integrazione verrà dato il nome di *integrale astratto di gauge*.

Sarà chiaro allora che gli integrali di McShane e di Henstock sono due casi particolari di integrale astratto di gauge e sarà anche chiaro il motivo per il quale, per l'integrale di McShane, non valeva il "classico" secondo teorema fondamentale del calcolo: la definizione classica di derivata non è quella naturale per la procedura di integrazione di McShane.

Infine, indagheremo le relazioni che sussistono tra l'integrale astratto di gauge e l'integrale di Lebesgue, sotto opportune condizioni di regolarità.

Capitolo 1. Spazi gauge-misurabili

1.1 Notazioni

Indicheremo con $\mathbb{N}$ l'insieme degli interi non negativi, mentre con $\mathbb{N}_0$ l'insieme degli interi positivi.
Se X è un insieme, indicheremo con $\wp(X)$ l'insieme delle parti di X.
Se X è un insieme, indicheremo con $\wp[X]$ l'insieme delle parti finite di X.
Se X è un insieme finito, indicheremo con $\#(X)$ il numero di elementi di X.
Se X è un insieme e $\mathcal{Y} \subset \wp(X)$, l'insieme $\bigcup_{Y\in\mathcal{Y}} Y$ verrà denotato anche con $\bigcup(\mathcal{Y})$ mentre l'insieme $\bigcap_{Y\in\mathcal{Y}} Y$ verrà denotato anche con $\bigcap(\mathcal{Y})$.
Se X, Y, Z sono insiemi, $f : X \longrightarrow Z$ e $Y \subset X$, indicheremo con $f_{|Y}$ la restrizione di f a Y.
Se (X, τ) è uno spazio topologico, indicheremo rispettivamente con $\mathrm{Int}_{(X,\tau)}, \mathrm{Cl}_{(X,\tau)}, \partial_{(X,\tau)}, \mathrm{Clint}_{(X,\tau)}$ gli operatori di interno, chiusura, frontiera e chiusura dell'interno di (X, τ) o, se il riferimento a (X, τ) è evidente dal contesto, semplicemente con $\mathrm{Int}, \mathrm{Cl}, \partial, \mathrm{Clint}$.
Se (X, τ) è uno spazio topologico e $x \in X$, indicheremo con τ_x l'insieme $\{T \in \tau \mid x \in T\}$.
Se X è un insieme, $\sim$ è una relazione di equivalenza su X e $x \in X$, indicheremo con $[x]_\sim$ la classe di equivalenza di x rispetto a $\sim$.
La fine delle dimostrazioni verrà indicata col simbolo □.

Algebre di Boole

Assumeremo che il lettore abbia familiarità con le algebre di Boole e con le relative proprietà elementari, delle quali richiamiamo la definizione e alcune proprietà, principalmente per fissare le notazioni.

1.2 Definizione (algebra di Boole)

Se la sestupla $(A, \wedge, \vee, \neg, 0, 1)$ è tale che:

- A è un insieme;
- $0,1 \in A$;
- $\wedge \colon A \times A \longrightarrow A$ è associativa, commutativa con 1 come elemento neutro;
- $\vee \colon A \times A \longrightarrow A$ è associativa, commutativa con 0 come elemento neutro;
- $\neg \colon A \longrightarrow A$;
- $\forall a_1, a_2 \in A, (a_1 \wedge a_2) \vee a_2 = a_2$;
- $\forall a_1, a_2 \in A, (a_1 \vee a_2) \wedge a_2 = a_2$;
- $\forall a_1, a_2, a_3 \in A, (a_1 \wedge a_2) \vee a_3 = (a_1 \vee a_3) \wedge (a_2 \vee a_3)$;
- $\forall a_1, a_2, a_3 \in A, (a_1 \vee a_2) \wedge a_3 = (a_1 \wedge a_3) \vee (a_2 \wedge a_3)$;
- $\forall a \in A, a \wedge (\neg a) = 0$;
- $\forall a \in A, a \vee (\neg a) = 1$;

diremo che $(A, \wedge, \vee, \neg, 0, 1)$ è un'*algebra di Boole*.
Nel seguito, con abuso di notazione, indicheremo un'algebra di Boole $(A, \wedge, \vee, \neg, 0, 1)$ soltanto con A, sottintendendo $\wedge, \vee, \neg, 0, 1$.

1.3 Osservazioni e definizioni

Se A è un'algebra di Boole, è possibile definire una relazione d'ordine in modo naturale, ponendo

$$\leq := \{(a_1, a_2) \in A \times A \mid a_1 \wedge a_2 = a_1\}.$$

Nel seguito, quando parleremo di relazione d'ordine definita in un'algebra di Boole, sottintenderemo sempre tale relazione.

Inoltre, in virtù dell'associatività e della commutatività delle operazioni $\wedge$ e $\vee$, è possibile definire $\bigwedge, \bigvee : \wp[A] \longrightarrow A$ come quelle uniche applicazioni che, se $C \in \wp[A]$ e $c : \{1, \dots, n\} \longrightarrow C$ è una enumerazione di C, soddisfano

$$\bigwedge(C) = \big((c_1 \wedge c_2) \wedge \dots\big) \wedge c_n, \bigvee(C) = \big((c_1 \vee c_2) \vee \dots\big) \vee c_n.$$

Infine, se $a_1, a_2 \in A$, con la notazione $a_1 \backslash a_2$ indicheremo l'elemento $a_1 \wedge (\neg a_2)$.

1.4 Osservazioni e definizioni (sottoalgebra di Boole)

Se A è un'algebra di Boole e $A_1 \subset A$ è tale che:

- $0,1 \in A_1$;
- A_1 è chiuso rispetto a $\wedge, \vee, \neg$;

diremo che A_1 è una *sottoalgebra* di A.

Se $B \subset A$, l'intersezione di tutte le sottoalgebre di A che contengono B è evidentemente una sottoalgebra di A che contiene B e verrà detta sottoalgebra generata da B.

1.5 Definizione (semianello)

Se A è un'algebra di Boole e $B \subset A$ è tale che:

- $0 \in B$;
- $\forall b_1, b_2 \in B, b_1 \wedge b_2 \in B$;
- $\forall b_1, b_2 \in B, \exists C \in \wp[B]$, tale che $b_1 \backslash b_2 = \bigvee(C)$ e $\forall c_1, c_2 \in C$, se $c_1 \neq c_2$ allora $c_1 \wedge c_2 = 0$;

diremo che B è un *semianello* di A.

1.6 Notazione

Se:

- A è un'algebra di Boole;
- B è un semianello di A;

indicheremo con B^0 l'insieme $B \backslash \{0\}$.

1.7 Osservazione e definizione

Se A è un'algebra di Boole e $a \in A$, porremo

$$A_a = \{b \in A \mid b \leq a\}.$$

È allora evidente che, posto:

- $\wedge_a : A_a \times A_a \longrightarrow A_a, (a_1, a_2) \longmapsto a_1 \wedge a_2$;
- $\vee_a : A_a \times A_a \longrightarrow A_a, (a_1, a_2) \longmapsto a_1 \vee a_2$;
- $\neg_a : A_a \longrightarrow A_a, b \longmapsto a \backslash b$;

la sestupla $(A_a, \wedge_a, \vee_a, \neg_a, 0, a)$ è un'algebra di Boole.

Inoltre, se B è un semianello di A, porremo

$$B_a = \{b \in B \mid b \leq a\}.$$

Anche in questo caso, è evidente che B_a è un semianello di A_a.
Infine, se B genera A, anche B_a genera A_a.

Sistemi di intorni regolari

1.8 Definizione
Se:
- X è un insieme;
- A è un'algebra di Boole;
- $\mathcal{I} : X \longrightarrow \wp(A)$;
- $a \in A$;

allora:
- indicheremo con $\mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(a)$ l'insieme $\{x \in X \mid a \in \mathcal{I}(x)\}$;
- indicheremo con $\mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(a)$ l'insieme $\{x \in X \mid \forall i \in \mathcal{I}(x)\,, i \wedge a \neq 0\}$;
- indicheremo con $\partial_{\mathcal{I}}(a)$ l'insieme $\mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(a) \setminus \mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(a)$;
- porremo $\mathcal{I}_a : \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(a) \longrightarrow \wp(A_a)\,, x \longmapsto \{i \wedge a \mid i \in \mathcal{I}(x)\}$.

1.9 Definizione (sistema di intorni regolare)
Se:
- X è un insieme;
- A è un'algebra di Boole;
- $\mathcal{I} : X \longrightarrow \wp(A)$;
- $\forall x \in X, \mathcal{I}(x) \neq \emptyset$;
- $\forall x \in X, 0 \notin \mathcal{I}(x)$;
- $\forall x \in X, \forall i \in \mathcal{I}(x)\,, \forall a \in A$, se $i \leq a$ allora $a \in \mathcal{I}(x)$;
- $\forall x \in X, \forall i_1, i_2 \in \mathcal{I}(x)\,, i_1 \wedge i_2 \in \mathcal{I}(x)$;
- $\forall a \in A^0, \exists x \in X, a \in \mathcal{I}(x)$;
- $\forall x \in X, \forall i_1 \in \mathcal{I}(x)\,, \exists i_2 \in \mathcal{I}(x)\,, \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(i_2) \subset \mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(i_1)$;

diremo che $\mathcal{I}$ è un *sistema di intorni regolare* di X in A.

1.10 Osservazione
Se:
- X è un insieme;
- A è un'algebra di Boole;
- $\mathcal{I}$ è un sistema di intorni regolare di X in A;

allora:
- $\mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(0) = \emptyset$;
- $\mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(0) = \emptyset$;
- $\partial_{\mathcal{I}}(0) = \emptyset$;
- $\mathcal{I}_0 = \emptyset$.

1.11 Proposizione

Siano:

- A un'algebra di Boole;
- $\mathcal{I}$ un sistema di intorni regolare di X in A.

Allora:

- $\forall a \in A, \mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(a) \subset \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(a)$;
- $\forall a \in A, \mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(a) = X \setminus \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(\neg a)$;
- $\forall a \in A, \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(a) = X \setminus \mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(\neg a)$;
- $\forall a \in A, \partial_{\mathcal{I}}(a) = \partial_{\mathcal{I}}(\neg a)$;
- $\forall a_1, a_2 \in A, \mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(a_1) \cap \mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(a_2) = \mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(a_1 \wedge a_2)$;
- $\forall a_1, a_2 \in A, \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(a_1) \cup \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(a_2) = \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(a_1 \vee a_2)$;
- $\forall a_1, a_2 \in A$, se $a_1 \leq a_2$ allora $\mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(a_1) \subset \mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(a_2)$;
- $\forall a_1, a_2 \in A$, se $a_1 \leq a_2$ allora $\mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(a_1) \subset \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(a_2)$;
- $\forall a_1, a_2 \in A, \mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(a_1) \cup \mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(a_2) \subset \mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(a_1 \vee a_2)$;
- $\forall a_1, a_2 \in A, \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(a_1) \cap \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(a_2) \supset \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(a_1 \wedge a_2)$;
- $\forall a \in A, \forall a_1 \in A_a, \mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(a_1) \cap \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(a) \subset \mathrm{Int}_{\mathcal{I}_a}(a_1)$;
- $\forall a \in A, \forall a_1 \in A_a, \mathrm{Int}_{\mathcal{I}_a}(a_1) \subset \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(a_1)$;
- $\forall a \in A, \forall a_1 \in A_a, \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}_a}(a_1) \subset \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(a_1)$.

Dimostrazione

Siano $a \in A$ e $x \in \mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(a)$. Allora $a \in \mathcal{I}(x)$. Dunque $\forall i \in \mathcal{I}(x), i \wedge a \in \mathcal{I}(x)$ e quindi $\forall i \in \mathcal{I}(x), i \wedge a \neq 0$, ossia $x \in \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(a)$. Dall'arbitrarietà di x e a, segue che $\forall a \in A, \mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(a) \subset \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(a)$.
Sia $a \in A$. Sia $x \in \mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(a)$. Allora $a \in \mathcal{I}(x)$ e, poiché $a \wedge (\neg a) = 0$, si ha che $x \notin \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(\neg a)$. Dunque $x \in X \setminus \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(\neg a)$. Dall'arbitrarietà di x, segue che $\mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(a) \subset X \setminus \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(\neg a)$. Sia $x \in X \setminus \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(\neg a)$. Sia $i \in \mathcal{I}(x)$ tale che $i \wedge (\neg a) = 0$. Allora $i \leq a$ e dunque $a \in \mathcal{I}(x)$, ossia $x \in \mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(a)$. Dall'arbitrarietà di x, segue che $X \setminus \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(\neg a) \subset \mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(a)$. Dunque $\mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(a) = X \setminus \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(\neg a)$. Dall'arbitrarietà di a, segue che $\forall a \in A, \mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(a) = X \setminus \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(\neg a)$.
Sia $a \in A$. Allora

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(a) &= \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}\big(\neg(\neg a)\big) \\
&= X \setminus \big(X \setminus \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}\big(\neg(\neg a)\big)\big) \\
&= X \setminus (\mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(\neg a)).
\end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di a, segue che $\forall a \in A, \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(a) = X \setminus \mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(\neg a)$.
Sia $a \in A$. Allora

$$\begin{aligned}
\partial_{\mathcal{I}}(a) &= \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(a) \setminus \mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(a) \\
&= (X \setminus \mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(\neg a)) \setminus (X \setminus \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(\neg a)) \\
&= (\mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(\neg a))^c \cap \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(\neg a) \\
&= \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(\neg a) \setminus \mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(\neg a) \\
&= \partial_{\mathcal{I}}(\neg a).
\end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di a, segue che $\forall a \in A, \partial_{\mathcal{I}}(a) = \partial_{\mathcal{I}}(\neg a)$.
Siano $a_1, a_2 \in A$. Sia $x \in \mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(a_1) \cap \mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(a_2)$. Allora $a_1 \in \mathcal{I}(x)$ e $a_2 \in \mathcal{I}(x)$. Dunque $a_1 \wedge a_2 \in \mathcal{I}(x)$, cioè $x \in \mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(a_1 \wedge a_2)$. Dall'arbitrarietà di x, segue che $\mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(a_1) \cap \mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(a_2) \subset \mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(a_1 \wedge a_2)$. Sia $x \in \mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(a_1 \wedge a_2)$. Allora $a_1 \wedge a_2 \in \mathcal{I}(x)$. Dunque $a_1 \in \mathcal{I}(x)$ e $a_2 \in \mathcal{I}(x)$, cioè $x \in \mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(a_1) \cap \mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(a_2)$. Dall'arbitrarietà di x, segue che $\mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(a_1 \wedge a_2) \subset \mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(a_1) \cap \mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(a_2)$. Dunque

$\mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(a_1) \cap \mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(a_2) = \mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(a_1 \wedge a_2)$. Dall'arbitrarietà di a_1 e a_2, segue che $\forall a_1, a_2 \in A, \mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(a_1) \cap \mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(a_2) = \mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(a_1 \wedge a_2)$.
Siano $a_1, a_2 \in A$. Allora

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(a_1) \cup \mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(a_2) & = & (X \setminus \mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(\neg a_1)) \cup (X \setminus \mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(\neg a_2)) \\ & = & (\mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(\neg a_1))^c \cup (\mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(\neg a_2))^c \\ & = & (\mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(\neg a_1) \cap \mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(\neg a_2))^c \\ & = & \left(\mathrm{Int}_{\mathcal{J}}\left((\neg a_1) \wedge (\neg a_2)\right)\right)^c \\ & = & \left(\mathrm{Int}_{\mathcal{J}}\left(\neg (a_1 \vee a_2)\right)\right)^c \\ & = & X \setminus \mathrm{Int}_{\mathcal{J}}\left(\neg (a_1 \vee a_2)\right) \\ & = & \mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(a_1 \vee a_2)\,. \end{array}$$

Dall'arbitrarietà di a_1 e a_2, segue che $\forall a_1, a_2 \in A, \mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(a_1) \cup \mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(a_2) = \mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(a_1 \vee a_2)$.
Siano $a_1, a_2 \in A$ tali che $a_1 \leq a_2$. Allora $\mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(a_1) = \mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(a_1 \wedge a_2) = \mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(a_1) \cap \mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(a_2) \subset \mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(a_2)$. Dall'arbitrarietà di a_1 e a_2, segue che $\forall a_1, a_2 \in A$, se $a_1 \leq a_2$ allora $\mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(a_1) \subset \mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(a_2)$.
Siano $a_1, a_2 \in A$ tali che $a_1 \leq a_2$. Allora $\mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(a_1) \subset \mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(a_1) \cup \mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(a_2) = \mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(a_1 \vee a_2) = \mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(a_2)$. Dall'arbitrarietà di a_1 e a_2, segue che $\forall a_1, a_2 \in A$, se $a_1 \leq a_2$ allora $\mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(a_1) \subset \mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(a_2)$.
Siano $a_1, a_2 \in A$. Poiché $\mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(a_1) \subset \mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(a_1 \vee a_2)$ e $\mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(a_2) \subset \mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(a_1 \vee a_2)$, si ha che $\mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(a_1) \cup \mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(a_2) \subset \mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(a_1 \vee a_2)$. Dall'arbitrarietà di a_1 e a_2, segue che $\forall a_1, a_2 \in A, \mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(a_1) \cup \mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(a_2) \subset \mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(a_1 \vee a_2)$.
Siano $a_1, a_2 \in A$. Poiché $\mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(a_1 \wedge a_2) \subset \mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(a_1)$ e $\mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(a_1 \wedge a_2) \subset \mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(a_2)$, si ha che $\mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(a_1 \wedge a_2) \subset \mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(a_1) \cap \mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(a_2)$. Dall'arbitrarietà di a_1 e a_2, segue che $\forall a_1, a_2 \in A, \mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(a_1 \wedge a_2) \subset \mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(a_1) \cap \mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(a_2)$.
Siano $a \in A$ e $a_1 \in A_a$. Sia $x \in \mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(a_1) \cap \mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(a)$. Allora $a_1 \in \mathcal{J}(x)$, dunque $a = a_1 \wedge a \in \mathcal{J}_a(x)$, ossia $x \in \mathrm{Int}_{\mathcal{J}_a}(a_1)$. Dall'arbitrarietà di x, segue che $\mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(a_1) \cap \mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(a) \subset \mathrm{Int}_{\mathcal{J}_a}(a_1)$. Dall'arbitrarietà di a_1 e a, segue che $\forall a \in A, \forall a_1 \in A_a, \mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(a_1) \cap \mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(a) \subset \mathrm{Int}_{\mathcal{J}_a}(a_1)$.
Siano $a \in A$ e $a_1 \in A_a$. Sia $x \in \mathrm{Int}_{\mathcal{J}_a}(a_1)$. Allora $a_1 \in \mathcal{J}_a(x)$. Sia $i \in \mathcal{J}(x)$ tale che $a_1 = i \wedge a$. Sia $j \in \mathcal{J}(x)$. Allora $j \wedge a_1 = j \wedge (i \wedge a) = (j \wedge i) \wedge a$. Poiché $j \wedge i \in \mathcal{J}(x)$, si ha, poiché $x \in \mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(a)$, che $(j \wedge i) \wedge a \neq 0$. Dunque $j \wedge a_1 \neq 0$. Dall'arbitrarietà di j, segue che $x \in \mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(a_1)$. Dall'arbitrarietà di x, segue che $\mathrm{Int}_{\mathcal{J}_a}(a_1) \subset \mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(a_1)$. Dall'arbitrarietà di a_1 e a, segue che $\forall a \in A, \forall a_1 \in A_a\,, \mathrm{Int}_{\mathcal{J}_a}(a_1) \subset \mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(a_1)$.
Siano $a \in A$ e $a_1 \in A_a$. Sia $x \in \mathrm{Cl}_{\mathcal{J}_a}(a_1)$. Sia $i \in \mathcal{J}(x)$. Allora $i \wedge a \in \mathcal{J}_a(x)$. Dunque $a_1 \wedge (i \wedge a) \neq 0$. Poiché $a_1 \wedge (i \wedge a) \leq a_1 \wedge i$, segue che $a_1 \wedge i \neq 0$. Dall'arbitrarietà di i, segue che $x \in \mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(a_1)$. Dall'arbitrarietà di x, segue che $\mathrm{Cl}_{\mathcal{J}_a}(a_1) \subset \mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(a_1)$. Dall'arbitrarietà di a_1 e a, segue che $\forall a \in A, \forall a_1 \in A_a, \mathrm{Cl}_{\mathcal{J}_a}(a_1) \subset \mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(a_1)$.

$\square$

1.12 Proposizione

Siano:

- X un insieme;
- A un'algebra di Boole;
- $\mathcal{J}$ un sistema di intorni regolare di X in A;
- $a \in A$.

Allora $\mathcal{J}_a$ è un sistema di intorni regolare di $\mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(a)$ in A_a.

Dimostrazione

Sia $x \in \mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(a)$. Poiché $\mathcal{J}(x) \neq \emptyset$, sia $i \in \mathcal{J}(x)$. Allora $i \wedge a \in \mathcal{J}_a(x)$. Dall'arbitrarietà di x, segue che $\forall x \in X, \mathcal{J}_a(x) \neq \emptyset$.

Sia $x \in \mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(a)$. Poiché, per la definizione di $\mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(a)$ si ha che $\forall i \in \mathcal{J}(x), a \wedge i \neq 0$, allora siccome ogni elemento di $\mathcal{J}_a(x)$ è della forma $a \wedge i$ per qualche $i \in \mathcal{J}(x)$, si ha che $0 \notin \mathcal{J}_a(x)$. Dall'arbitrarietà di x, segue che $\forall x \in X, 0 \notin \mathcal{J}_a(x)$.

Siano $x \in \mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(a), j \in \mathcal{J}_a(x), b \in A_a$ tali che $j \leq b$. Sia $i \in \mathcal{J}(x)$ tale che $j = i \wedge a$. Allora $i \leq b \vee i$ e dunque $b \vee i \in \mathcal{J}(x)$. Segue che $(b \vee i) \wedge a \in \mathcal{J}_a(x)$. Ma

$$(b \vee i) \wedge a = (b \wedge a) \vee (i \wedge a) = b \vee j = b.$$

Dunque $b \in \mathcal{J}_a(x)$. Dall'arbitrarietà di b, j e x segue che $\forall x \in X, \forall j \in \mathcal{J}_a(x), \forall b \in A_a$, se $j \leq b$ allora $b \in \mathcal{J}_a(x)$.

Siano $x \in X, j_1, j_2 \in \mathcal{J}_a(x)$. Siano $i_1, i_2 \in \mathcal{J}(x)$ tali che $j_1 = i_1 \wedge a$ e $j_2 = i_2 \wedge a$. Allora

$$j_1 \wedge j_2 = (i_1 \wedge a) \wedge (i_2 \wedge a) = (i_1 \wedge i_2) \wedge a \in \mathcal{J}_a(x).$$

Dall'arbitrarietà di j_1, j_2 e x, segue che $\forall x \in X, \forall j_1, j_2 \in \mathcal{J}_a(x), j_1 \wedge j_2 \in \mathcal{J}_a(x)$.

Sia $b \in A_a^0$. Allora $b \in A^0$. Sia dunque $x \in X$ tale che $b \in \mathcal{J}(x)$. Poiché $b \leq a$, si ha che $a \in \mathcal{J}(x)$ e dunque $x \in \mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(a)$. Segue che $x \in \mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(a) \subset \mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(a)$. Infine, osservando che $b = b \wedge a$, abbiamo che $b \in \mathcal{J}_a(x)$. Dall'arbitrarietà di b, segue che $\forall b \in A_a^0, \exists x \in \mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(a), b \in \mathcal{J}_a(x)$.

Sia $x \in \mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(a)$. Sia $j_1 \in \mathcal{J}_a(x)$. Sia $i_1 \in \mathcal{J}(x)$ tale che $j_1 = i_1 \wedge a$. Sia $i_2 \in \mathcal{J}(x)$ tale che $\mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(i_2) \subset \mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(i_1)$. Allora $i_2 \wedge a \in \mathcal{J}_a(x)$. Inoltre

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cl}_{\mathcal{J}_a}(i_2 \wedge a) &\subset \mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(i_2 \wedge a) \\
&\subset \mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(i_2) \cap \mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(a) \\
&\subset \mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(i_1) \cap \mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(a) \\
&\subset \mathrm{Int}_{\mathcal{J}_a}(i_1 \wedge a) \\
&= \mathrm{Int}_{\mathcal{J}_a}(j_1).
\end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di j_1 e di x, segue che:

$$\forall x \in \mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(a), \forall j_1 \in \mathcal{J}_a(x), \exists j_2 \in \mathcal{J}_a(x), \mathrm{Cl}_{\mathcal{J}_a}(j_2) \subset \mathrm{Int}_{\mathcal{J}_a}(j_1).$$

□

1.13 Notazione

Se:

- A è un'algebra di Boole;
- $\mathcal{J}$ è un sistema di intorni regolare di X in A;

nel seguito, indicheremo con $\tau(A, \mathcal{J})$ l'insieme

$$\left\{ \bigcup_{a \in E} \mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(a) \mid E \in \wp(A) \right\}.$$

1.14 Proposizione

Siano:

- A un'algebra di Boole;
- $\mathcal{I}$ un sistema di intorni regolare di X in A.

Allora $(X, \tau(A, \mathcal{I}))$ è uno spazio topologico di cui l'insieme $\{\mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(a) \mid a \in A\}$ costituisce una base. Inoltre, se $a \in A$, la topologia di sottospazio indotta su $\mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(a)$ da $(X, \tau(A, \mathcal{I}))$ coincide con la topologia $\tau(A_a, \mathcal{I}_a)$.

Dimostrazione

Abbiamo visto che $\forall a_1, a_2 \in A, \mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(a_1) \cap \mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(a_2) = \mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(a_1 \wedge a_2)$, dunque $\{\mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(a) \mid a \in A\}$ è una base per una topologia su X, costituita appunto dalle unioni di elementi di $\{\mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(a) \mid a \in A\}$, ossia $\tau(A, \mathcal{I})$.

Per quanto riguarda l'altra asserzione, sia $a \in A$. Sia $x \in \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(a)$. Allora la topologia di sottospazio ha come base locale di intorni per x l'insieme $\{\mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(i) \cap \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(a) \mid i \in \mathcal{I}(x)\}$ mentre la topologia $\tau(A_a, \mathcal{I}_a)$ ha come base locale di intorni per x l'insieme $\left\{\mathrm{Int}_{\mathcal{I}_a}(i \wedge a) \mid i \in \mathcal{I}(x)\right\}$. Osserviamo che

$$\forall i \in \mathcal{I}(x), \mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(i) \cap \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(a) \subset \mathrm{Int}_{\mathcal{I}_a}(i \wedge a).$$

Inoltre, se $i \in \mathcal{I}(x)$, sia $j_i \in \mathcal{I}(x)$ tale che $\mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(j_i) \subset \mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(i)$. Allora

$$\forall i \in \mathcal{I}(x), \mathrm{Int}_{\mathcal{I}_a}(j_i \wedge a) \subset \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(j_i \wedge a) \subset \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(j_i) \cap \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(a) \subset \mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(i) \cap \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(a).$$

Dunque, le due basi locali di intorni per x sono equivalenti e quindi, dall'arbitrarietà di x, le due topologie coincidono.

□

1.15 Proposizione

Siano:

- A un'algebra di Boole;
- $\mathcal{I}$ un sistema di intorni regolare di X in A.

Allora:

- $\forall a \in A, \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(a) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(a))$. In particolare $\forall a \in A, \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(a)$ è un chiuso di $(X, \tau(A, \mathcal{I}))$;
- $\forall a \in A, \mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(a) = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(a))$;
- $\forall a \in A, \partial_{\mathcal{I}}(a) = \partial(\mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(a)) = \partial(\mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(a))$.

Dimostrazione

Sia $a \in A$. Sia $x \in \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(a)$. Sia $T \in \tau(A, \mathcal{I})$ tale che $x \in T$. Sia $i \in \mathcal{I}(x)$ tale che $\mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(i) \subset T$. Allora $i \wedge a \neq 0$ e dunque $\mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(i \wedge a) \neq \emptyset$. Dunque $\emptyset \neq \mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(i \wedge a) = \mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(i) \cap \mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(a) \subset T \cap \mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(a)$. Dall'arbitrarietà di T, segue che $x \in \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(a))$. Dall'arbitrarietà di x, segue che , $\mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(a) \subset \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(a))$. Sia $x \in \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(a))$. Sia $i \in \mathcal{I}(x)$. Poiché $x \in \mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(i) \in \tau(A, \mathcal{I})$, si ha che $\mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(a \wedge i) = \mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(a) \cap \mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(i) \neq \emptyset$. Dunque $a \wedge i \neq 0$. Dall'arbitrarietà di i, segue che $x \in \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(a)$. Dall'arbitrarietà di x, segue che $\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(a)) \subset \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(a)$. Dunque $\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(a)) = \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(a)$. Dall'arbitrarietà di a, segue che $\forall a \in A, \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(a) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(a))$.

Sia $a \in A$. Allora

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(a) & = & X \setminus \mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(\neg a) \\ & = & X \setminus \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(\neg a)) \\ & = & \mathrm{Int}\big(X \setminus (\mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(\neg a))\big) \\ & = & \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(a))\,. \end{array}$$

Dall'arbitrarietà di a, segue che $\forall a \in A, \mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(a) = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(a))$.

Sia $a \in A$. Allora

$$\begin{array}{rcl} \partial_{\mathcal{J}}(a) & = & \mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(a) \setminus \mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(a) \\ & = & \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(a)) \setminus \mathrm{Int}(\mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(a)) \\ & = & \partial(\mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(a)) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} \partial_{\mathcal{J}}(a) & = & \mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(a) \setminus \mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(a) \\ & = & \mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(a)) \setminus \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(a)) \\ & = & \partial(\mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(a))\,. \end{array}$$

Dall'arbitrarietà di a, segue che $\forall a \in A, \partial_{\mathcal{J}}(a) = \partial(\mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(a)) = \partial(\mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(a))$.

1.16 Definizione (gauge)

Se:

- X è un insieme;
- A è un'algebra di Boole;
- $\mathcal{J}$ è un sistema di intorni regolare di X in A;
- $\delta : X \longrightarrow A$;
- $\forall x \in X, \delta(x) \in \mathcal{J}(x)$;

diremo che δ è una *gauge* di X relativa a $\mathcal{J}$.

L'insieme delle gauge di X relative a $\mathcal{J}$ verrà denotata con $\mathcal{G}(X, \mathcal{J})$ o, se il riferimento a X e $\mathcal{J}$ è evidente dal contesto, semplicemente con $\mathcal{G}$.

Inoltre, se $a \in A$, porremo

$$\begin{array}{rccl} \delta_{|a} : & \mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(a) & \longrightarrow & A \\ & x & \longmapsto & \delta(x) \wedge a \end{array}$$

e, se il riferimento a X e $\mathcal{J}$ è evidente dal contesto, ci riferiremo a $\mathcal{G}(\mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(a), \mathcal{J}_a)$ semplicemente con $\mathcal{G}_a$.

□

1.17 Osservazione

Se:

- X è un insieme;
- A è un'algebra di Boole;
- $\mathcal{J}$ è un sistema di intorni regolare di X in A;
- $a \in A$;

Allora $\mathcal{G}_a = \{\delta_{|a} \mid \delta \in \mathcal{G}\}$.

1.18 Definizione e osservazione
Se:
- X è un insieme;
- A è un'algebra di Boole;
- $\mathcal{I}$ è un sistema di intorni regolare di X in A;
- $\delta_1, \delta_2 \in \mathcal{G}$;

allora porremo:
$$\begin{array}{rccl} \delta_1 \wedge \delta_2 : & X & \longrightarrow & A \\ & x & \longmapsto & \delta_1(x) \wedge \delta_2(x) . \end{array}$$
Poiché $\forall x \in X, \forall i_1, i_2 \in \mathcal{I}(x), i_1 \wedge i_2 \in \mathcal{I}(x)$, è evidente che $\delta_1 \wedge \delta_2 \in \mathcal{G}$.

Famiglie disgiunte finite e partizioni

1.19 Definizione (famiglie disgiunte finite)
Se:
- A è un'algebra di Boole;
- B è un semianello che genera A;
- $F \in \wp[B]$;
- $\forall a_1, a_2 \in F$, se $a_1 \neq a_2$ allora $a_1 \wedge a_2 = 0$;

allora diremo che F è una *famiglia disgiunta finita* in B.
L'insieme delle famiglie disgiunte finite in B verrà indicato con $\mathcal{F}(B)$ o, se il riferimento a B è evidente dal contesto, semplicemente con $\mathcal{F}$.

1.20 Definizione (partizioni)
Se:
- A è un'algebra di Boole;
- B è un semianello che genera A;
- $P \in \mathcal{F}$;
- $\bigvee(P) = 1$;

allora diremo che P è una *partizione* in B.
L'insieme delle partizioni in B verrà indicato con $\mathcal{P}(B)$ o, se il riferimento a B è evidente dal contesto, semplicemente con $\mathcal{P}$.

1.21 Definizione e osservazione (coppie fondamentali)
Se:
- X è un insieme;
- A è un'algebra di Boole;
- $\mathcal{I}$ è un sistema di intorni regolare di X in A;
- B è un semianello che genera A;
- $\mathcal{C} \subset X \times B$;
- $\forall b \in B^0, \exists x \in \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(b), (x, b) \in \mathcal{C}$;
- $\forall (x, c) \in \mathcal{C}, \forall b \in B$, se $x \in \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(b)$ allora $(x, b \wedge c) \in \mathcal{C}$;
- $\forall x \in X, (x, 0) \in \mathcal{C}$;

diremo che $\mathcal{C}$ è un sistema di *coppie fondamentali* di $(X, A, \mathcal{I}, B)$.

Inoltre, se $a \in A$, indicheremo con $\mathcal{C}_a$ l'insieme $\{(x, b) \in \mathcal{C} \mid x \in \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(a) \;\; e \; b \leq a\}$.
È evidente che $\mathcal{C}_a$ è un sistema di coppie fondamentali di $(\mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(a), A_a, \mathcal{I}_a, B_a)$.

1.22 Osservazione

Se:

- X è un insieme;
- A è un'algebra di Boole;
- $\mathcal{I}$ è un sistema di intorni regolare di X in A;
- B è un semianello che genera A;
- $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ sono sistemi di coppie fondamentali di $(X, A, \mathcal{I}, B)$;
- $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$;
- $a \in A$;

allora $\mathcal{C}_a \subset \mathcal{D}_a$.

1.23 Definizione

Se:

- X è un insieme;
- A è un'algebra di Boole;
- $\mathcal{F}^* \subset X \times A$;

denoteremo con $\mathrm{Point}(\mathcal{F}^*)$ la proiezione di $\mathcal{F}^*$ sulla prima componente di $X \times A$ e con $\mathrm{Supp}(\mathcal{F}^*)$ la proiezione di $\mathcal{F}^*$ sulla seconda componente di $X \times A$.

1.24 Definizione (famiglie puntate disgiunte finite)

Se:

- X è un insieme;
- A è un'algebra di Boole;
- $\mathcal{I}$ è un sistema di intorni regolare di X in A;
- B è un semianello che genera A;
- $\mathcal{C}$ è un sistema di coppie fondamentali di $(X, A, \mathcal{I}, B)$;
- $F^* \in \wp[\mathcal{C}]$;
- $\forall (x_1, b_1), (x_2, b_2) \in F^*$, se $b_1 = b_2$ allora o $x_1 = x_2$, oppure $b_1 = 0 = b_2$;
- $\mathrm{Supp}(F^*) \in \mathcal{F}$;

diremo che F^* è una *famiglia puntata disgiunta finita* di $\mathcal{C}$.
L'insieme delle famiglie puntate disgiunte finite di $\mathcal{C}$ verrà indicato con $\mathcal{F}^*(\mathcal{C})$ o, se il riferimento a $\mathcal{C}$ è evidente dal contesto, semplicemente con $\mathcal{F}^*$.
Inoltre, se $a \in A$, l'insieme $\mathcal{F}^*(\mathcal{C}_a)$ verrà indicato con $\mathcal{F}_a^*(\mathcal{C})$ o, se il riferimento a $\mathcal{C}$ è evidente dal contesto, semplicemente con $\mathcal{F}_a^*$.

1.25 Definizione (partizioni puntate)

Se:

- X è un insieme;
- A è un'algebra di Boole;
- $\mathcal{I}$ è un sistema di intorni regolare di X in A;
- B è un semianello che genera A;
- $\mathcal{C}$ è un sistema di coppie fondamentali di $(X, A, \mathcal{I}, B)$;
- $P^* \in \mathcal{F}^*$;
- $\mathrm{Supp}(P^*) \in \mathcal{P}$;

diremo che P^* è una *partizione puntata* di $\mathcal{C}$.

L'insieme delle partizioni puntate di $\mathcal{C}$ verrà indicato con $\mathcal{P}^*(\mathcal{C})$ o, se il riferimento a $\mathcal{C}$ è evidente dal contesto, semplicemente con $\mathcal{P}^*$.

Inoltre, se $a \in A$, l'insieme $\mathcal{P}^*(\mathcal{C}_a)$ verrà indicato con $\mathcal{P}_a^*(\mathcal{C})$ o, se il riferimento a $\mathcal{C}$ è evidente dal contesto, semplicemente con $\mathcal{P}_a^*$.

Spazi gauge-misurabili

1.26 Definizione (famiglie puntate disgiunte finite e partizioni puntate δ-fini)

Se:

- X è un insieme;
- A è un'algebra di Boole;
- $\mathcal{I}$ è un sistema di intorni regolare di X in A;
- B è un semianello che genera A;
- $\mathcal{C}$ è un sistema di coppie fondamentali di $(X, A, \mathcal{I}, B)$;
- $\delta \in \mathcal{G}$;
- $F^* \in \mathcal{F}^*$;
- $\forall (x, b) \in F^*, b \leq \delta(x)$;

diremo che F^* è *δ-fine*. L'insieme delle famiglie puntate disgiunte finite di $\mathcal{C}$ che sono δ-fini, verrà indicato con $\mathcal{F}^*(\mathcal{C}, \delta)$ o, se il riferimento a $\mathcal{C}$ è evidente dal contesto, semplicemente con $\mathcal{F}^*(\delta)$.

Inoltre, indicheremo con $\mathcal{P}^*(\mathcal{C}, \delta)$ l'insieme $\mathcal{P}^*(\mathcal{C}) \cap \mathcal{F}^*(\mathcal{C}, \delta)$ o, se il riferimento a $\mathcal{C}$ è evidente dal contesto, semplicemente con $\mathcal{P}^*(\delta)$.

Infine, se $a \in A$ e $\eta \in \mathcal{G}_a$, se il riferimento a $\mathcal{C}$ è evidente dal contesto, l'insieme $\mathcal{F}^*(\mathcal{C}_a, \eta)$ verrà indicato con $\mathcal{F}_a^*(\eta)$ e analogamente l'insieme $\mathcal{P}^*(\mathcal{C}_a, \eta)$ verrà indicato con $\mathcal{P}_a^*(\eta)$.

1.27 Definizione (spazio gauge-misurabile)

Se:

- X è un insieme;
- A è un'algebra di Boole;
- $\mathcal{I}$ è un sistema di intorni regolare di X in A;
- B è un semianello che genera A;
- $\mathcal{C}$ è un sistema di coppie fondamentali di $(X, A, \mathcal{I}, B)$;
- $\forall a \in A^0, \forall \delta \in \mathcal{G}, \mathcal{P}_a^*\left(\delta_{|a}\right) \neq \emptyset$;

diremo che $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$ è uno *spazio gauge-misurabile*.

1.28 Osservazione

Se:

- $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$ è uno spazio gauge-misurabile;
- $\mathcal{D}$ è un sistema di coppie fondamentali di $(X, A, \mathcal{I}, B)$;
- $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$;

allora anche $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{D})$ è uno spazio gauge-misurabile.

1.29 Teorema

Sia $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$ uno spazio gauge-misurabile.
Allora $(X, \tau(A, \mathcal{I}))$ è compatto.

Dimostrazione

Sia $\mathcal{T}$ una famiglia di aperti di $\tau(A, \mathcal{I})$ che ricoprono X.
Per ogni $x \in X$, sia $T_x \in \mathcal{T}$ tale che $x \in T_x$.
Per ogni $x \in X$, sia $a_x \in A$ tale che $\mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(a_x) \subset T_x$.
Poniamo

$$\begin{array}{rccc} \delta: & X & \longrightarrow & A \\ & x & \longmapsto & a_x. \end{array}$$

È evidente che $\delta \in \mathcal{G}$.
Sia $P^* \in \mathcal{P}^*(\delta)$.
Allora, sfruttando la proposizione 1.11, otteniamo che:

$$X = \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(1) = \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}\left(\bigvee \mathrm{Supp}(P^*)\right) = \bigcup_{a \in \mathrm{Supp}(P^*)} \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(a) \subset \bigcup_{(x,a) \in P^*} \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(\delta(x)) \subset \bigcup_{(x,a) \in P^*} T_x.$$

□

1.30 Osservazione

Se:

- $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$ è uno spazio gauge-misurabile;
- $\delta \in \mathcal{G}$;
- $a \in A$;
- $P^* \in \mathcal{P}_a^*(\delta_{|a})$;

allora $\exists Q^* \in \mathcal{P}^*(\delta), P^* \subset Q^*$.
Infatti è sufficiente prendere $P_1^* \in \mathcal{P}_{\neg a}^*(\delta_{|\neg a})$ e notare che $P^* \cup P_1^*$ soddisfa la tesi.

1.31 Osservazione

Se:

- $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$ è uno spazio gauge-misurabile;
- $F \in \mathcal{F}(A)$;
- $\delta \in \mathcal{G}_{\vee(F)}$;
- $\forall a \in F, P_a^* \in \mathcal{P}_a^*(\delta_{|a})$;

allora $\bigcup_{a \in F} P_a^* \in \mathcal{P}_{\cup(P_a^*)}^*(\delta_{|\vee(F)})$.

Capitolo 2. Misura e integrazione sugli spazi gauge-misurabili

Definizioni e proprietà elementari

2.1 Lemma

Siano:

- $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$ uno spazio gauge-misurabile;
- (Y, τ) uno spazio topologico di Hausdorff;
- $\not{f} : \mathcal{P}^* \longrightarrow Y$;
- $y_1, y_2 \in Y$;

tali che:

- $\forall I \in \tau_{y_1}, \exists \delta \in \mathcal{G}, \forall P^* \in \mathcal{P}^*(\delta), \not{f}(P^*) \in I$;
- $\forall I \in \tau_{y_2}, \exists \delta \in \mathcal{G}, \forall P^* \in \mathcal{P}^*(\delta), \not{f}(P^*) \in I$.

Allora $y_1 = y_2$.

Dimostrazione

Supponiamo per assurdo non sia questo il caso. Siano dunque $I_1 \in \tau_{y_1}$ e $I_2 \in \tau_{y_2}$ disgiunti. Siano $\delta_1, \delta_2 \in \mathcal{G}$ tali che:

- $\forall P^* \in \mathcal{P}^*(\delta_1), \not{f}(P^*) \in I_1$;
- $\forall P^* \in \mathcal{P}^*(\delta_2), \not{f}(P^*) \in I_2$.

Sappiamo che $\delta_1 \wedge \delta_2 \in \mathcal{G}$ e che $\mathcal{P}^*(\delta_1 \wedge \delta_2) \neq \emptyset$. Sia dunque $P^* \in \mathcal{P}^*(\delta_1 \wedge \delta_2)$. Allora $P^* \in \mathcal{P}^*(\delta_1) \cap \mathcal{P}^*(\delta_2)$ e dunque $\not{f}(P^*) \in I_1 \cap I_2 = \emptyset$, assurdo.

□

2.2 Definizione (limite decrescente in $\mathcal{P}^*$)

Se:

- $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$ è uno spazio gauge-misurabile;
- (Y, τ) è uno spazio topologico di Hausdorff;
- $\not{f} : \mathcal{P}^* \longrightarrow Y$;
- $y \in Y$;
- $\forall I \in \tau_y, \exists \delta \in \mathcal{G}, \forall P^* \in \mathcal{P}^*(\delta), \not{f}(P^*) \in I$;

diremo che $\not{f}$ ammette limite per P^* che si restringe in $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$ e porremo

$$(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C}) - \lim_{P^*\downarrow} \not{f}(P^*) := y$$

o, se il riferimento a $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$ è evidente dal contesto, porremo semplicemente:

$$\lim_{P^*\downarrow} \not{f}(P^*) := y.$$

2.3 Definizione (additività e misura)

Se:

- A è un'algebra di Boole;
- $\mu : A \longrightarrow [-\infty, +\infty]$;
- $\forall a_1, a_2 \in A$, se $a_1 \wedge a_2 = 0$ allora $\mu(a_1 \vee a_2) = \mu(a_1) + \mu(a_2)$;

diremo che μ è *additiva*.

Inoltre, se μ assume solo valori reali, diremo che μ è una *misura di A a valori in* $\mathbb{R}$.

Infine, se $\forall a \in A, 0 \leq \mu(a) < +\infty$, diremo che μ è una *misura* di A.

2.4 Osservazione

Se:

- A è un'algebra di Boole;
- μ è una misura di A a valori in $\mathbb{R}$;

allora $\mu(0) = \mu(0 \vee 0) = \mu(0) + \mu(0)$, da cui $\mu(0) = 0$.

2.5 Definizione (somme di Riemann)

Se:

- $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$ è uno spazio gauge-misurabile;
- μ è una misura di A a valori in $\mathbb{R}$;
- $F^* \in \mathcal{F}^*$;
- $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$;

porremo

$$\sum_{F^*} f\Delta\mu \coloneqq \sum_{(x,b)\in F^*} f(x)\,\mu(b),$$

con l'usuale convenzione che se $F^* = \emptyset$ allora

$$\sum_{F^*} f\Delta\mu = 0.$$

2.6 Definizione (integrabilità e sommabilità)

Se:

- $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$ è uno spazio gauge-misurabile;
- μ è una misura di A a valori in $\mathbb{R}$;
- $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$;

sono tali che esiste in $[-\infty, +\infty]$

$$(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C}) - \lim_{P^*\downarrow} \sum_{P^*} f\Delta\mu,$$

diremo che f è *μ-integrabile* in $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$ e porremo

$$(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C}) - \int f d\mu \coloneqq (X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C}) - \lim_{P^*\downarrow} \sum_{P^*} f\Delta\mu$$

o, se il riferimento a $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$ è evidente dal contesto, ci riferiremo a $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C}) - \int f d\mu$ semplicemente con

$$\int f d\mu.$$

Se inoltre

$$\int f d\mu \in \mathbb{R},$$

diremo che f è *μ-sommabile* in $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$.
L'insieme delle funzioni μ-sommabili verrà indicato con $\mathcal{G}(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C}, \mu)$ o, qualora il riferimento a $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$ sia evidente dal contesto, semplicemente con $\mathcal{G}(\mu)$.

2.7 Osservazione

Se:

- $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$ e $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{D})$ sono spazi gauge-misurabili;
- $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$;
- μ è una misura di A a valori in $\mathbb{R}$;
- $f \in \mathcal{G}(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{D}, \mu)$;

allora $f \in \mathcal{G}(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C}, \mu)$ e

$$(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C}) - \int f d\mu = (X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{D}) - \int f d\mu.$$

2.8 Osservazione

Se:

- $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$ è uno spazio gauge-misurabile;
- μ è una misura di A a valori in $\mathbb{R}$;
- $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ è costante, con costante uguale a $k \in \mathbb{R}$;

allora:

- $f \in \mathcal{G}(\mu)$;
- $\int f d\mu = k\mu(1)$.

Infatti

$$\forall P^* \in \mathcal{P}^*, \sum_{P^*} f\Delta\mu = \sum_{(x,b)\in P^*} f(x)\,\mu(b) = \sum_{(x,b)\in P^*} k\,\mu(b) = k \sum_{(x,b)\in P^*} \mu(b) = k\,\mu(1)$$

e dunque:

$$\int f d\mu = \lim_{P^*\downarrow} \sum_{P^*} f\Delta\mu = k\,\mu(1).$$

2.9 Teorema

Siano:

- $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$ uno spazio gauge-misurabile;
- μ una misura di A a valori in $\mathbb{R}$;

allora $\mathcal{G}(\mu)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e l'applicazione:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}(\mu) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \int f d\mu \end{array}$$

è un funzionale lineare.
Inoltre, se μ è una misura su A, tale funzionale è positivo.

Dimostrazione

Parte 1

Siano $f, g \in \mathcal{G}(\mu)$.

Sia $\varepsilon > 0$.

Siano $\delta_1, \delta_2 \in \mathcal{G}$ tali che:

- $\forall P^* \in \mathcal{P}^*(\delta_1)\,, \left|\sum_{P^*} f\Delta\mu - \int f d\mu\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$;
- $\forall P^* \in \mathcal{P}^*(\delta_2)\,, \left|\sum_{P^*} g\Delta\mu - \int g d\mu\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Allora

$$\begin{aligned}\forall P^* \in \mathcal{P}^*(\delta_1 \wedge \delta_2)\,, \left|\sum_{P^*}(f+g)\Delta\mu - \left(\int f d\mu + \int g d\mu\right)\right| &\leq \left|\sum_{P^*} f\Delta\mu - \int f d\mu\right| + \left|\sum_{P^*} g\Delta\mu - \int g d\mu\right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di ε, segue che

$$f + g \in \mathcal{G}(\mu)$$

e che:

$$\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

Dall'arbitrarietà di f e g, segue la chiusura di $\mathcal{G}(\mu)$ rispetto alla somma e l'additività dell'applicazione considerata.

Parte 2

Siano $f \in \mathcal{G}(\mu)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Se $\lambda = 0$, la tesi è banale.

Supponiamo allora che $\lambda \neq 0$.

Sia $\varepsilon > 0$.

Sia $\delta \in \mathcal{G}$ tale che

$$\forall P^* \in \mathcal{P}^*(\delta)\,, \left|\sum_{P^*} f\Delta\mu - \int f d\mu\right| \leq \frac{\varepsilon}{|\lambda|}.$$

Allora

$$\begin{aligned}\forall P^* \in \mathcal{P}^*(\delta)\,, \quad \left|\sum_{P^*} \lambda f\Delta\mu - \lambda \int f d\mu\right| &= |\lambda| \left|\sum_{P^*} f\Delta\mu - \int f d\mu\right| \\ &\leq |\lambda| \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di ε, segue che

$$\lambda f \in \mathcal{G}(\mu)$$

e che

$$\int \lambda f d\mu = \lambda \int f d\mu.$$

Dall'arbitrarietà di f e λ, segue la chiusura di $\mathcal{G}(\mu)$ rispetto al prodotto per numeri reali e l'omogeneità dell'applicazione considerata.

Parte 3
Se μ è una misura di A allora, quale che sia $f \in \mathcal{G}(\mu)$ non negativa e $P^* \in \mathcal{P}^*$, si ha che $\sum_{P^*} f\Delta\mu \geq 0$, da cui segue la parte restante della tesi.

□

2.10 Teorema (criterio di Cauchy)

Siano:
- $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$ uno spazio gauge-misurabile;
- μ una misura di A a valori in $\mathbb{R}$;
- $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$;

allora sono equivalenti:
- $f \in \mathcal{G}(\mu)$;
- $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \in \mathcal{G}, \forall P_1^*, P_2^* \in \mathcal{P}^*(\delta), \left|\sum_{P_1^*} f\Delta\mu - \sum_{P_2^*} f\Delta\mu\right| \leq \varepsilon$.

Dimostrazione
Se $f \in \mathcal{G}(\mu)$, dimostrare che

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \in \mathcal{G}, \forall P_1^*, P_2^* \in \mathcal{P}^*(\delta), \left|\sum_{P_1^*} f\Delta\mu - \sum_{P_2^*} f\Delta\mu\right| \leq \varepsilon$$

è una banale conseguenza della disuguaglianza triangolare.
Per il viceversa, per ogni $n \in \mathbb{N}_0$ sia $\delta_n^1 \in \mathcal{G}$ tale che:

$$\forall P_1^*, P_2^* \in \mathcal{P}^*(\delta_n^1), \left|\sum_{P_1^*} f\Delta\mu - \sum_{P_2^*} f\Delta\mu\right| \leq \frac{1}{2n}.$$

Per ogni $N \in \mathbb{N}_0$ sia $\delta_N = \delta_1^1 \wedge \ldots \wedge \delta_N^1$.
Per ogni $n \in \mathbb{N}_0$, sia $P_n^* \in \mathcal{P}^*(\delta_n)$.
Sia $\varepsilon > 0$. Sia $N \in \mathbb{N}_0$ tale che $N \geq \frac{1}{2\varepsilon}$. Allora $\forall m, n \geq N, P_n^*, P_m^* \in \mathcal{P}^*(\delta_N)$ e dunque

$$\forall m, n \geq N, \left|\sum_{P_m^*} f\Delta\mu - \sum_{P_n^*} f\Delta\mu\right| \leq \frac{1}{2N} \leq \varepsilon.$$

Dall'arbitrarietà di ε, segue che $\left\{\sum_{P_n^*} f\Delta\mu\right\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{R}$.

Dunque esiste reale

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{P_n^*} f\Delta\mu.$$

Sia $\varepsilon > 0$.

Sia $N \in \mathbb{N}_0$ tale che $N \geq \frac{1}{\varepsilon}$.

Allora

$$\forall P^* \in \mathcal{P}^*(\delta_N)\,,\quad \begin{aligned} \left|\sum_{P^*} f\Delta\mu - \lim_{n\to\infty}\sum_{P_n^*} f\Delta\mu\right| &= \left|\sum_{P^*} f\Delta\mu - \sum_{P_N^*} f\Delta\mu + \sum_{P_N^*} f\Delta\mu - \lim_{n\to\infty}\sum_{P_n^*} f\Delta\mu\right| \\ &\le \left|\sum_{P^*} f\Delta\mu - \sum_{P_N^*} f\Delta\mu\right| + \left|\sum_{P_N^*} f\Delta\mu - \lim_{n\to\infty}\sum_{P_n^*} f\Delta\mu\right| \\ &\le \frac{1}{2N} + \frac{1}{2N} = \frac{1}{N} \le \varepsilon. \end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di ε, segue che $f \in \mathcal{G}(\mu)$.

□

2.11 Teorema

Siano:

- $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$ uno spazio gauge-misurabile;
- μ una misura di A a valori in $\mathbb{R}$;
- $f \in \mathcal{G}(\mu)$;
- $a \in A$.

Allora:

$$f_{|\,\mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(a)} \in \mathcal{G}\big(\mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(a)\,, A_a, \mathcal{I}_a, B_a, \mathcal{C}_a, \mu_{|A_a}\big).$$

Dimostrazione

Sia $\varepsilon > 0$.

Sia $\delta \in \mathcal{G}$ tale che:

$$\forall P_1^*, P_2^* \in \mathcal{P}^*(\delta)\,, \left|\sum_{P_1^*} f\Delta\mu - \sum_{P_2^*} f\Delta\mu\right| \le \varepsilon.$$

Siano $P_1^*, P_2^* \in \mathcal{P}_a^*\big(\delta_{|a}\big)$.

Sia $P_3^* \in \mathcal{P}_{\neg a}^*\big(\delta_{|\neg a}\big)$.

Allora $P_1^* \cup P_3^*, P_2^* \cup P_3^* \in \mathcal{P}^*(\delta)$ e dunque

$$\begin{aligned} \left|\sum_{P_1^*} f_{|\,\mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(a)}\Delta\mu_{|A_a} - \sum_{P_2^*} f_{|\,\mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(a)}\Delta\mu_{|A_a}\right| &= |\sum_{P_1^*} f_{|\,\mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(a)}\Delta\mu_{|A_a} + \sum_{P_3^*} f_{|\,\mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(\neg a)}\Delta\mu_{|A_{\neg a}} \\ &\quad -\sum_{P_3^*} f_{|\,\mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(\neg a)}\Delta\mu_{|A_{\neg a}} - \sum_{P_2^*} f_{|\,\mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(a)}\Delta\mu_{|A_a}| \\ &= \left|\sum_{P_1^* \cup P_3^*} f\Delta\mu - \sum_{P_2^* \cup P_3^*} f\Delta\mu\right| \\ &\le \varepsilon. \end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di P_1^*, P_2^* e ε, segue la tesi.

□

2.12 Definizione
Se:
- $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$ è uno spazio gauge-misurabile;
- μ è una misura di A a valori in $\mathbb{R}$;
- $f \in \mathcal{G}(\mu)$;
- $a \in A$;

porremo
$$\int_a f d\mu \coloneqq \int f_{|\,\mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(a)} d\mu_{|A_a}.$$

2.13 Definizione
Se:
- X è un insieme;
- A è un'algebra di Boole;
- $\mathcal{I}$ è un sistema di intorni regolare di X in A;
- $P \in \mathcal{P}$;
- $x \in X$;

indicheremo con $P(x)$ l'insieme $\{a \in P \mid x \in \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(a)\}$.

2.14 Lemma
Siano:
- X un insieme;
- A un'algebra di Boole;
- $\mathcal{I}$ un sistema di intorni regolare di X in A;
- $P \in \mathcal{P}$;
- $x \in X$;

allora $x \in \mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(\bigvee(P(x)))$ o, equivalentemente, $\bigvee(P(x)) \in \mathcal{I}(x)$.

Dimostrazione
Osserviamo che $\bigvee(P\setminus P(x)) = \neg \bigvee(P(x))$. Dunque:
$$x \in X\setminus \bigcup_{a\in P\setminus P(x)} \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(a) = X\setminus \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}\left(\bigvee(P\setminus P(x))\right) = X\setminus \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}\left(\neg \bigvee(P(x))\right) = \mathrm{Int}_{\mathcal{I}}\left(\bigvee(P(x))\right).$$

□

2.15 Teorema
Siano:
- $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$ uno spazio gauge-misurabile;
- μ una misura di A a valori in $\mathbb{R}$;
- $f \in \mathcal{G}(\mu)$;
- $P \in \mathcal{P}(A)$;

allora
$$\sum_{a\in P} \int_a f d\mu = \int f d\mu.$$

Dimostrazione

Sia $\varepsilon > 0$.

Sia $\forall a \in P, Q_a \in \mathcal{P}_a(B_a)$.

Sia $Q = \bigcup_{a \in P} Q_a$.

Osserviamo che $Q \in \mathcal{P}(B)$.

Sia, quale che sia $b \in Q$, $\delta_b \in \mathcal{G}_b$ tale che

$$\forall P^* \in \mathcal{P}_b^*(\delta_b)\,, \left| \sum_{P^*} f \Delta\mu - \int_b f d\mu \right| \leq \frac{\varepsilon}{\#(Q) + 1}.$$

Sia, quale che sia $b \in Q$, $\delta^b \in \mathcal{G}$ tale che $\delta^b_{|b} = \delta_b$.

Definiamo

$$\begin{array}{cccc} \delta: & X & \longrightarrow & A \\ & x & \longmapsto & \bigwedge_{b \in Q} \delta^b(x) \wedge \bigvee(Q(x))\,. \end{array}$$

È chiaro che $\delta \in \mathcal{G}$.

Sia $P^* \in \mathcal{P}^*(\delta)$.

Poniamo $\forall b \in Q, P_b^* \coloneqq \{(x, b \wedge c) \mid (x, c) \in P^*\}$.

Asseriamo che $\forall b \in Q, \forall (x, c) \in P^*$, se $b \wedge c \neq 0$ allora $x \in \mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(b)$.

Infatti, supponiamo per assurdo non sia questo il caso.

Siano dunque $b \in Q$ e $(x, c) \in P^*$ tali che $b \wedge c \neq 0$ e $x \notin \mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(b)$. Allora $b \notin Q(x)$ e dunque $b \wedge \bigvee(Q(x)) = 0$, da cui $\emptyset = \mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(0) = \mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(b \wedge \bigvee(Q(x))) = \mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(b) \cap \mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(\bigvee(Q(x)))$. Ora, $c \leq \delta(x) \leq \bigvee(Q(x))$ e dunque $b \wedge c \leq \bigvee(Q(x))$. D'altronde $b \wedge c \leq b$. Dunque

$$\emptyset \neq \mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(b \wedge c) \subset \mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(b) \cap \mathrm{Int}_{\mathcal{J}}\left(\bigvee(Q(x))\right) = \emptyset,$$

assurdo.

Per la definizione di sistema di coppie fondamentali di $(X, A, \mathcal{J}, B)$, abbiamo allora che

$$\forall b \in Q, \forall (x, c) \in P^*, (x, b \wedge c) \in \mathcal{C}.$$

Dunque:

$$\forall b \in Q, P_b^* \in \mathcal{P}_b^*\big(\delta_{|b}\big).$$

Inoltre, sfruttando l'additività di μ, notiamo che valgono:

- $\sum_{P^*} f \Delta\mu = \sum_{b \in Q} \sum_{P_b^*} f_{|\,\mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(b)} \Delta\mu_{|A_b}$;
- $\sum_{a \in P} \int_a f d\mu = \sum_{a \in P} \sum_{b \in Q_a} \int_b f d\mu = \sum_{b \in Q} \int_b f d\mu$.

Dunque

$$\begin{aligned} \left| \sum_{P^*} f \Delta\mu - \sum_{a \in P} \int_a f d\mu \right| &= \left| \sum_{b \in Q} \sum_{P_b^*} f_{|\,\mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(b)} \Delta\mu_{|A_b} - \sum_{b \in Q} \int_b f d\mu \right| \\ &\leq \sum_{b \in Q} \left| \sum_{P_b^*} f_{|\,\mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(b)} \Delta\mu_{|A_b} - \int_b f d\mu \right| \\ &\leq \sum_{b \in Q} \frac{\varepsilon}{\#(Q) + 1} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di P^* e ε segue la tesi.

$\square$

2.16 Corollario

Siano:

- $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$ uno spazio gauge-misurabile;
- μ una misura di A a valori in $\mathbb{R}$;
- $f \in \mathcal{G}(\mu)$;
- $F \in \mathcal{F}(A)$;

allora

$$\sum_{a \in F} \int_a f d\mu = \int_{\vee(F)} f d\mu.$$

Dimostrazione

È sufficiente applicare il teorema precedente nello spazio gauge-misurabile $\left(\mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(\vee(F)), A_{\vee(F)}, \mathcal{I}_{\vee(F)}, B_{\vee(F)}, \mathcal{C}_{\vee(F)}\right)$.

□

2.17 Definizione (misura indotta)

Se:

- $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$ è uno spazio gauge-misurabile;
- μ è una misura di A a valori in $\mathbb{R}$;
- $f \in \mathcal{G}(\mu)$;

porremo

$$\begin{array}{rccc} \mu_f : & A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & a & \longmapsto & \displaystyle\int_a f d\mu . \end{array}$$

2.18 Corollario

Siano:

- $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$ uno spazio gauge-misurabile;
- μ una misura di A a valori in $\mathbb{R}$;
- $f \in \mathcal{G}(\mu)$;

allora μ_f è una misura di A a valori in $\mathbb{R}$.

Il lemma di Henstock

2.19 Teorema (lemma di Henstock)

Siano:

- $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$ uno spazio gauge-misurabile;
- μ una misura di A;
- $f \in \mathcal{G}(\mu)$;
- $\varepsilon > 0$;
- $\delta \in \mathcal{G}$;

tali che

$$\forall P^* \in \mathcal{P}^*(\delta), \left|\sum_{P^*} f \Delta\mu - \int f d\mu\right| \leq \varepsilon.$$

Allora

$$\forall F^* \in \mathcal{F}^*(\delta)\,,\ \sum_{(x,b)\in F^*}\left|f(x)\,\mu(b)-\int_b f d\mu\right| \le 2\varepsilon.$$

Dimostrazione

Sia $F^* \in \mathcal{F}^*(\delta)$. Estendiamo F^* a $P^* \in \mathcal{P}^*(\delta)$. Definiamo:

- $P_+^* \coloneqq \left\{(x,b) \in P^* \mid f(x)\,\mu(b) - \int_b f d\mu \ge 0\right\}$;
- $P_-^* \coloneqq \left\{(x,b) \in P^* \mid f(x)\,\mu(b) - \int_b f d\mu < 0\right\}$.

Sia $\eta > 0$.

Per ogni $b \in \mathrm{Supp}(P^*)$, sia $P_b^* \in \mathcal{P}_b^*\left(\delta_{|b}\right)$ tale che

$$\forall b \in \mathrm{Supp}(P^*)\,,\left|\sum_{P_b^*} f\Delta\mu - \int_b f d\mu\right| \le \frac{\eta}{\#(P^*)+1}.$$

Allora:

- $Q_+^* \coloneqq P_+^* \cup \left(\bigcup_{b\in\mathrm{Supp}(P_-^*)} P_b^*\right) \in \mathcal{P}^*(\delta)$;
- $Q_-^* \coloneqq P_-^* \cup \left(\bigcup_{b\in\mathrm{Supp}(P_+^*)} P_b^*\right) \in \mathcal{P}^*(\delta)$.

Ora:

$$\begin{aligned}
&\sum_{(x,b)\in P_+^*}\left|f(x)\,\mu(b)-\int_b f d\mu\right| \\
=\ & \sum_{(x,b)\in P_+^*}\left(f(x)\,\mu(b)-\int_b f d\mu\right) \\
=\ & \sum_{(x,b)\in P_+^*}\left(f(x)\,\mu(b)-\int_b f d\mu\right) - \sum_{b\in\mathrm{Supp}(P_-^*)}\left|\sum_{P_b^*} f\Delta\mu - \int_b f d\mu\right| + \sum_{b\in\mathrm{Supp}(P_-^*)}\left|\sum_{P_b^*} f\Delta\mu - \int_b f d\mu\right| \\
\le\ & \sum_{(x,b)\in P_+^*}\left(f(x)\,\mu(b)-\int_b f d\mu\right) - \sum_{b\in\mathrm{Supp}(P_-^*)}\left(\int_b f d\mu - \sum_{P_b^*} f\Delta\mu\right) + \eta\,\frac{\#(P_-^*)}{\#(P^*)+1} \\
=\ & \sum_{(x,b)\in P_+^*}(f(x)\,\mu(b)) + \sum_{b\in\mathrm{Supp}(P_-^*)}\sum_{P_b^*} f\Delta\mu \\
& -\left(\sum_{b\in\mathrm{Supp}(P_+^*)}\int_b f d\mu + \sum_{b\in\mathrm{Supp}(P_-^*)}\int_b f d\mu\right) + \eta\,\frac{\#(P_-^*)}{\#(P^*)+1} \\
=\ & \sum_{Q_+^*} f\Delta\mu - \int f d\mu + \eta\,\frac{\#(P_-^*)}{\#(P^*)+1} \le \left|\sum_{Q_+^*} f\Delta\mu - \int f d\mu\right| + \eta\,\frac{\#(P_-^*)}{\#(P^*)+1} \le \varepsilon + \eta\,\frac{\#(P_-^*)}{\#(P^*)+1}.
\end{aligned}$$

Analogamente:

$$\sum_{(x,b)\in P_-^*}\left|f(x)\,\mu(b)-\int_b f d\mu\right| \le \varepsilon + \eta\,\frac{\#(P_+^*)}{\#(P^*)+1}.$$

In conclusione:

$$
\begin{aligned}
\sum_{(x,b)\in F^*} \left| f(x)\,\mu(b) - \int_b f d\mu \right| \\
&\le \sum_{(x,b)\in P^*} \left| f(x)\,\mu(b) - \int_b f d\mu \right| \\
&= \sum_{(x,b)\in P^*_+} \left| f(x)\,\mu(b) - \int_b f d\mu \right| + \sum_{(x,b)\in P^*_-} \left| f(x)\,\mu(b) - \int_b f d\mu \right| \\
&\le \varepsilon + \eta \frac{\#(P^*_-)}{\#(P^*)+1} + \varepsilon + \eta \frac{\#(P^*_+)}{\#(P^*)+1} \le 2\varepsilon + \eta.
\end{aligned}
$$

Dall'arbitrarietà di η e $\mathcal{F}^*$, segue la tesi.

□

2.20 Corollario

Siano:
- $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$ uno spazio gauge-misurabile;
- μ una misura di A;
- $f \in \mathcal{G}(\mu)$;
- $\varepsilon > 0$;
- $\delta \in \mathcal{G}$;

tali che

$$\forall P^* \in \mathcal{P}^*(\delta)\,, \left| \sum_{P^*} f \Delta\mu - \int f d\mu \right| \le \varepsilon.$$

Allora:

$$\forall F^* \in \mathcal{F}^*(\delta)\,, \sum_{(x,b)\in F^*} \left| |f(x)|\,\mu(b) - \left| \int_b f d\mu \right| \right| \le 2\varepsilon.$$

Dimostrazione

Semplice applicazione della disuguaglianza $\big||x| - |y|\big| \le |x - y|$.

Capitolo 3. Integrazione in $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{\mathcal{J}}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{B})$

3.1 Teorema

Siano:

- $(X, A, \mathcal{J}, B, X \times B)$ uno spazio gauge-misurabile;
- μ una misura di A;
- $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$;
- $\delta \in \mathcal{G}$;
- $\varepsilon > 0$;

allora sono equivalenti:

- $\forall P_1^*, P_2^* \in \mathcal{P}^*(\delta)\,, \left|\sum_{P_1^*} f\Delta\mu - \sum_{P_2^*} f\Delta\mu\right| \leq \varepsilon$;
- $\forall P \in \mathcal{P}, \forall x, y : P \longrightarrow X,$ se $\{(x(b)\,, b)\}_{b\in P}, \{(y(b)\,, b)\}_{b\in P} \in \mathcal{P}^*(\delta)$ allora $\left|\sum_{b\in P} f\big(x(b)\big)\,\mu(b) - \sum_{b\in P} f\big(y(b)\big)\,\mu(b)\right| \leq \varepsilon$.

Dimostrazione

Che la prima asserzione implichi la seconda è evidente.

Mostriamo che la seconda implica la prima.

Siano $P_1^*, P_2^* \in \mathcal{P}^*(\delta)$.

Poniamo:

- $Q_1^* = \{(x, b \wedge c) \mid (x, b) \in P_1^*, c \in \mathrm{Supp}(P_2^*)\}$;
- $Q_2^* = \{(x, b \wedge c) \mid (x, b) \in P_2^*, c \in \mathrm{Supp}(P_1^*)\}$.

Allora:

- $\mathrm{Supp}(Q_1^*) \setminus \{0\} = \mathrm{Supp}(Q_2^*) \setminus \{0\}$;
- $\forall b \in \mathrm{Supp}(Q_1^*) \setminus \{0\}, \exists!\, x_b \in X, (x_b, b) \in Q_1^*$;
- $\forall b \in \mathrm{Supp}(Q_2^*) \setminus \{0\}, \exists!\, y_b \in X, (y_b, b) \in Q_2^*$;
- $\forall b \in \mathrm{Supp}(Q_1^*) \setminus \{0\}, b \subset \delta(x_b)$;
- $\forall b \in \mathrm{Supp}(Q_2^*) \setminus \{0\}, b \subset \delta(y_b)$.

Poniamo $\mathrm{Supp}(Q_1^*) \setminus \{0\} = R = \mathrm{Supp}(Q_2^*) \setminus \{0\}$ e definiamo

$$\begin{array}{rccc} x : & R & \longrightarrow & X \\ & x & \longmapsto & x_b \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccc} y : & R & \longrightarrow & X \\ & y & \longmapsto & y_b. \end{array}$$

Osserviamo che:

- $R \in \mathcal{P}$;
- $\{(x(b)\,, b)\}_{b\in R} \in \mathcal{P}^*(\delta)$;
- $\{(y(b)\,, b)\}_{b\in R} \in \mathcal{P}^*(\delta)$;
- $\sum_{b\in R} f\big(x(b)\big)\,\mu(b) = \sum_{P_1^*} f\Delta\mu$;
- $\sum_{b\in R} f\big(y(b)\big)\,\mu(b) = \sum_{P_2^*} f\Delta\mu$.

Dunque

$$\left|\sum_{P_1^*} f\Delta\mu - \sum_{P_2^*} f\Delta\mu\right| = \left|\sum_{b\in R} f\big(x(b)\big)\,\mu(b) - \sum_{b\in R} f\big(y(b)\big)\,\mu(b)\right| \leq \varepsilon.$$

Dall'arbitrarietà di P_1^* e P_2^* segue la tesi.

□

3.2 Teorema

Siano:

- $(X, A, \mathcal{I}, B, X \times B)$ uno spazio gauge-misurabile;
- μ una misura di A;
- $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$;

allora sono equivalenti:

- $f \in \mathcal{G}(\mu)$;
- $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \in \mathcal{G}, \forall P \in \mathcal{P}, \forall x, y : P \longrightarrow X$, se $\{(x(b)\,, b)\}_{b\in P}, \{(y(b)\,, b)\}_{b\in P} \in \mathcal{P}^*(\delta)$ allora $\sum_{b\in P}\left|f\big(x(b)\big) - f\big(y(b)\big)\right|\mu(b) \leq \varepsilon$.

Dimostrazione

Che la seconda asserzione implichi la prima è evidente, in virtù del precedente teorema e del criterio di Cauchy.

Mostriamo che la prima implica la seconda.

Sia $\varepsilon > 0$. Sia $\delta \in \mathcal{G}$ tale che

$$\forall P^* \in \mathcal{P}^*(\delta)\,, \left|\sum_{P^*} f\Delta\mu - \int f d\mu\right| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Allora, per il lemma di Henstock, si ha che

$$\forall P^* \in \mathcal{P}^*(\delta)\,, \sum_{(x,b)\in P^*}\left|f(x)\,\mu(b) - \int_b f d\mu\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Siano $P \in \mathcal{P}$ e $x, y : P \longrightarrow X$ tali che $\{(x(b)\,, b)\}_{b\in P}, \{(y(b)\,, b)\}_{b\in P} \in \mathcal{P}^*(\delta)$.

Allora

$$\begin{aligned}
\sum_{b\in P}\left|f\big(x(b)\big) - f\big(y(b)\big)\right|\mu(b) &= \sum_{b\in P}\left|f\big(x(b)\big)\,\mu(b) - f\big(y(b)\big)\,\mu(b)\right| \\
&= \sum_{b\in P}\left|f\big(x(b)\big)\,\mu(b) - \int_b f d\mu + \int_b f d\mu - f\big(y(b)\big)\,\mu(b)\right| \\
&\leq \sum_{b\in P}\left|f\big(x(b)\big)\,\mu(b) - \int_b f d\mu\right| + \sum_{b\in P}\left|\int_b f d\mu - f\big(y(b)\big)\,\mu(b)\right| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di x, y, P e ε segue la tesi.

□

3.3 Corollario (assoluta sommabilità in $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{\mathcal{J}}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{B})$ delle funzioni sommabili)

Siano:

- $(X, A, \mathcal{J}, B, X \times B)$ uno spazio gauge-misurabile;
- μ una misura su A;
- $f \in \mathcal{G}(\mu)$;

allora $|f| \in \mathcal{G}(\mu)$.

Dimostrazione

Poiché $f \in \mathcal{G}(\mu)$, abbiamo per il teorema precedente che $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \in \mathcal{G}, \forall P \in \mathcal{P}, \forall x, y : P \longrightarrow X$, se $\{(x(b), b)\}_{b\in P}, \{(y(b), b)\}_{b\in P} \in \mathcal{P}^*(\delta)$ allora

$$\sum_{b\in P} \Big| |f(x(b))| - |f(y(b))| \Big| \mu(b) \leq \sum_{b\in P} |f(x(b)) - f(y(b))| \mu(b) \leq \varepsilon,$$

il che, sempre per il teorema precedente, implica che $|f| \in \mathcal{G}(\mu)$.

□

3.4 Teorema (sommabilità in $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{\mathcal{J}}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{B})$ delle funzioni continue)

Siano:

- $(X, A, \mathcal{J}, B, X \times B)$ uno spazio gauge-misurabile;
- μ una misura di A;
- $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continua come funzione da X con la topologia indotta da $\mathcal{J}$ a valori in $\mathbb{R}$ con la topologia standard;

allora $f \in \mathcal{G}(\mu)$.

Dimostrazione

Sia $\varepsilon > 0$.

Per ogni $x \in X$, sia $i_x \in \mathcal{J}(x)$ tale che $\forall y \in \mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(i_x), |f(y) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2(\mu(1)+1)}$.

Poniamo:

$$\begin{array}{rccc} \delta : & X & \longrightarrow & A \\ & x & \longmapsto & i_x. \end{array}$$

Sia $P \in \mathcal{P}$.

Per ogni $b \in P$, sia $x_b \in \mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(b)$.

Se $y, z : P \longrightarrow X$ sono tali che $\{(y(b), b)\}_{b\in P}, \{(z(b), b)\}_{b\in P} \in \mathcal{P}^*(\delta)$, allora, osservando che $\forall b \in P, x_b \in \mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(b) \subset \mathrm{Int}_{\mathcal{J}}\big(\delta(y(b)) \wedge \delta(z(b))\big) = \mathrm{Int}_{\mathcal{J}}\big(\delta(y(b))\big) \cap \mathrm{Int}_{\mathcal{J}}\big(\delta(z(b))\big)$, otteniamo che

$$\begin{aligned} \sum_{b\in P} |f(y(b)) - f(z(b))| \mu(b) &= \sum_{b\in P} |f(y(b)) - f(x(b)) + f(x(b)) - f(z(b))| \mu(b) \\ &\leq \sum_{b\in P} |f(x(b)) - f(y(b))| \mu(b) + \sum_{b\in P} |f(x(b)) - f(z(b))| \mu(b) \\ &\leq \sum_{b\in P} \frac{\varepsilon}{2(\mu(1)+1)} \mu(b) + \sum_{b\in P} \frac{\varepsilon}{2(\mu(1)+1)} \mu(b) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

e quindi, dall'arbitrarietà di P e ε, per il teorema precedente, segue la tesi.

□

Corollario (sommabilità delle funzioni continue)

Siano:

- $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$ uno spazio gauge-misurabile;
- μ una misura di A;
- $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continua come funzione da X con la topologia indotta da $\mathcal{I}$ a valori in $\mathbb{R}$ con la topologia standard;

allora $f \in \mathcal{G}(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C}, \mu)$.

Dimostrazione

Poiché $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$ è uno spazio gauge-misurabile anche $(X, A, \mathcal{I}, B, X \times B)$ lo è. Per il teorema precedente, $f \in \mathcal{G}(X, A, \mathcal{I}, B, X \times B, \mu)$ e dunque $f \in \mathcal{G}(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C}, \mu)$.

□

Capitolo 4. Variazione e assoluta sommabilità

4.1 Definizione (variazione)
Se:

- A è un'algebra di Boole;
- μ è una misura di A a valori in $\mathbb{R}$;

porremo

$$\begin{array}{rccl} |\mu|: & A & \longrightarrow & [0,+\infty] \\ & a & \longmapsto & \sup\limits_{P\in\mathcal{P}_a} \sum\limits_{a_1\in P} |\mu(a_1)|\,. \end{array}$$

Tale funzione prenderà il nome di variazione totale di μ.
Qualora $|\mu|$ sia limitata, si dirà che μ è a variazione limitata.

4.2 Teorema
Siano:

- A un'algebra di Boole;
- μ una misura di A a valori in $\mathbb{R}$;

allora $|\mu|$ è additiva.
Inoltre se $|\mu|(1) < +\infty$, allora μ è a variazione limitata e quindi $|\mu|$ è una misura di A.

Dimostrazione

Parte 1 (additività)
Siano $a_1, a_2 \in A$ tali che $a_1 \wedge a_2 = 0$.
Chiaramente:

$$\begin{aligned} |\mu|(a_1 \vee a_2) &= \sup_{P\in\mathcal{P}_{a_1\vee a_2}} \sum_{a\in P} |\mu(a)| \\ &\geq \sup_{\substack{P_1\in\mathcal{P}_{a_1} \\ P_2\in\mathcal{P}_{a_2}}} \left(\sum_{a\in P_1} |\mu(a)| + \sum_{a\in P_2} |\mu(a)| \right) \\ &= \sup_{P_1\in\mathcal{P}_{a_1}} \sum_{a\in P_1} |\mu(a)| + \sup_{P_2\in\mathcal{P}_{a_2}} \sum_{a\in P_2} |\mu(a)| \\ &= |\mu|(a_1) + |\mu|(a_2)\,. \end{aligned}$$

Per mostrare la disuguaglianza opposta, supponiamo che $P \in \mathcal{P}_{a_1\vee a_2}$.
Allora:

- $P_{a_1} \coloneqq \{a \wedge a_1 \mid a \in P\} \in \mathcal{P}_{a_1}$.
- $P_{a_2} \coloneqq \{a \wedge a_2 \mid a \in P\} \in \mathcal{P}_{a_2}$.

Dunque

$$\begin{aligned}\sum_{a\in P}|\mu(a)| &= \sum_{a\in P}\left|\mu\big((a\wedge a_1)\vee(a\wedge a_2)\big)\right| \\ &= \sum_{a\in P}|\mu(a\wedge a_1)+\mu(a\wedge a_2)| \\ &\le \sum_{a\in P}|\mu(a\wedge a_1)|+\sum_{a\in P}|\mu(a\wedge a_2)| \\ &= \sum_{a\in P_{a_1}}|\mu(a)|+\sum_{a\in P_{a_2}}|\mu(a)| \\ &\le |\mu|(a_1)+|\mu|(a_2)\,.\end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di P, segue che:

$$|\mu|(a_1\vee a_2)=\sup_{P\in\mathcal{P}_{a_1\vee a_2}}\sum_{a\in P}|\mu(a)|\le|\mu|(a_1)+|\mu|(a_2).$$

Dall'arbitrarietà di a_1, a_2, segue l'additività di $|\mu|$.

Parte 2 (variazione limitata e misura)

Poiché $|\mu|$ è finitamente additiva e a valori non negativi, segue che

$$\forall a\in A, |\mu|(a)\le|\mu|(a)+|\mu|(\neg a)=|\mu|(1).$$

Dunque, se $|\mu|(1)<+\infty$, lo stesso si ha su ogni elemento di A. Segue che $|\mu|$ è additiva e a valori in $[0,+\infty)$, ossia una misura su A.

□

4.3 Osservazione

Se:

- A è un'algebra di Boole;
- B è un semianello di A che genera A;
- μ è una misura di A a valori in $\mathbb{R}$;

allora

$$\forall a\in A, |\mu|(a)=\sup_{P\in\mathcal{P}_a(B)}\sum_{b\in P}|\mu(b)|.$$

In conseguenza di ciò, nel seguito, ogni volta che avremo a che fare con uno spazio gauge-misurabile $(X,A,\mathcal{I},B,\mathcal{C})$, anche qualora ci trovassimo nel contesto di una variazione, con $\mathcal{P}$ intenderemo sempre $\mathcal{P}(B)$ e analogamente, se $a\in A$, con $\mathcal{P}_a$ intenderemo sempre $\mathcal{P}_a(B)$.

4.4 Definizione (assoluta sommabilità)

Se:

- $(X,A,\mathcal{I},B,\mathcal{C})$ è uno spazio gauge-misurabile;
- μ è una misura di A;
- $f\in\mathcal{G}(\mu)$;
- $|f|\in\mathcal{G}(\mu)$;

diremo che f è *assolutamente μ-sommabile* in $(X,A,\mathcal{I},B,\mathcal{C})$.

L'insieme delle funzioni assolutamente μ-sommabili in $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$ verrà indicato con $\mathcal{G}^1(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C}, \mu)$ o, se il riferimento a $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$ è evidente dal contesto, semplicemente con $\mathcal{G}^1(\mu)$.

4.5 Teorema (assoluta sommabilità e variazione)

Siano:

- $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$ uno spazio gauge-misurabile;
- μ una misura di A;
- $f \in \mathcal{G}(\mu)$;

allora:

- $|f|$ è integrabile;
- $\forall a \in A, |\mu_f|(a) = \int_a |f| d\mu$;
- $\forall a \in A, |\mu_f|(a) < +\infty$ se e solo se $|f| \in \mathcal{G}(\mu_{|A_a})$.

Dimostrazione

Dimostreremo solo il caso $a = 1$, essendo il caso generale identico, semplicemente restringendosi a $(\mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(a), A_a, \mathcal{I}_a, B_a, \mathcal{C}_a)$.
Sia $M < |\mu_f|(1)$.
Sia $\varepsilon > 0$ tale che $M + 2\varepsilon < |\mu_f|(1)$.
Sia $P \in \mathcal{P}$ tale che

$$M + 2\varepsilon \leq \sum_{b \in P} |\mu_f(b)|.$$

Sia $\delta_1 \in \mathcal{G}$ tale che

$$\forall P^* \in \mathcal{P}^*(\delta_1), \left| \sum_{P^*} f \Delta\mu - \int f d\mu \right| \leq \varepsilon.$$

Definiamo

$$\begin{array}{rccl} \delta: & X & \longrightarrow & A \\ & x & \longmapsto & \delta_1(x) \wedge \bigvee (P(x)), \end{array}$$

dove ricordiamo che $P(x)$ è definito in 2.13.
Sia $P^* \in \mathcal{P}^*(\delta)$.
Sia

$$Q^* := \{(x, b \wedge c) \mid b \in P \ e \ (x, c) \in P^*\}.$$

Asseriamo che $\forall b \in P, \forall (x, c) \in P^*$, se $b \wedge c \neq 0$ allora $x \in \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(b)$.
Infatti, supponiamo per assurdo non sia questo il caso.
Siano dunque $b \in P$ e $(x, c) \in P^*$ tali che $b \wedge c \neq 0$ e $x \notin \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(b)$. Allora $b \notin P(x)$ e dunque $b \wedge \bigvee(P(x)) = 0$, da cui $\emptyset = \mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(0) = \mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(b \wedge \bigvee(P(x))) = \mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(b) \cap \mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(\bigvee(P(x)))$. Ora, $c \leq \delta(x) \leq \bigvee(P(x))$ e dunque $b \wedge c \leq \bigvee(P(x))$. D'altronde $b \wedge c \leq b$. Dunque

$$\emptyset \neq \mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(b \wedge c) \subset \mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(b) \cap \mathrm{Int}_{\mathcal{I}}\left(\bigvee(P(x))\right) = \emptyset,$$

assurdo.
Allora, per la definizione di sistema fondamentale di coppie di $(X, A, \mathcal{I}, B)$, si ha che

$$\forall (x, b) \in Q^*, (x, b) \in \mathcal{C}.$$

Dunque
$$Q^* \in \mathcal{P}^*(\delta) \subset \mathcal{P}^*(\delta_1).$$
Dunque, per il corollario del lemma di Henstock, si ha che
$$\sum_{(x,b)\in Q^*} \left| |f(x)|\,\mu(b) - \left|\int_b f d\mu\right| \right| \leq 2\varepsilon.$$
Inoltre, posto
$$\forall b \in \mathcal{P}, Q_b \coloneqq \{c \in \mathrm{Supp}(Q^*) \mid c \subset b\},$$
si ha che
$$\forall b \in P, Q_b \in \mathcal{P}_b$$
e dunque
$$\forall b \in P, \int_b f d\mu = \sum_{c\in Q_b} \int_c f d\mu,$$
da cui anche
$$|\mu_f|(1) \geq \sum_{(x,b)\in Q^*} \left|\int_b f d\mu\right| = \sum_{b\in P} \sum_{c\in Q_b} \left|\int_c f d\mu\right| \geq \sum_{b\in P} \left|\int_b f d\mu\right| \geq M + 2\varepsilon.$$
Infine, notando che
$$\sum_{P^*} f\Delta\mu = \sum_{Q^*} f\Delta\mu,$$
otteniamo da una parte che
$$\begin{aligned}
|\mu_f|(1) &\geq \sum_{(x,b)\in Q^*} \left|\int_b f d\mu\right| \\
&\geq \sum_{(x,b)\in Q^*} |f(x)|\,\mu(b) - 2\varepsilon \\
&= \sum_{Q^*} |f|\Delta\mu - 2\varepsilon \\
&= \sum_{P^*} |f|\Delta\mu - 2\varepsilon,
\end{aligned}$$
dall'altra che
$$\begin{aligned}
\sum_{P^*} |f|\Delta\mu &= \sum_{Q^*} |f|\Delta\mu \\
&= \sum_{Q^*} |f|\Delta\mu - \sum_{(x,b)\in Q^*} \left|\int_b f d\mu\right| + \sum_{(x,b)\in Q^*} \left|\int_b f d\mu\right| \\
&\geq -\sum_{(x,b)\in Q^*} \left| |f(x)|\,\mu(b) - \left|\int_b f d\mu\right| \right| + \sum_{(x,b)\in Q^*} \left|\int_b f d\mu\right| \\
&\geq -2\varepsilon + \sum_{b\in P} \left|\int_b f d\mu\right| \geq M.
\end{aligned}$$
Dunque
$$M \leq \sum_{P^*} |f|\Delta\mu \leq |\mu_f|(1) + 2\varepsilon.$$

Dall'arbitrarietà di P^*, ε e M, segue che $|f|$ è μ-integrabile in $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$ e che:

$$|\mu_f|(1) = \int |f| d\mu.$$

Da cui la tesi.

□

4.6 Corollario

Siano:

- $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$ uno spazio gauge-misurabile;
- μ una misura di A;
- $f \in \mathcal{G}(\mu)$;

allora

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu.$$

Inoltre, se $g \in \mathcal{G}(\mu)$ è tale che $|f| \leq g$, allora $|f| \in \mathcal{G}(\mu)$.

Dimostrazione

Per quanto riguarda la prima parte, sapendo dal teorema precedente che $|f|$ è μ-integrabile in $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$, possiamo distinguere il caso in cui $|f| \in \mathcal{G}(\mu)$, da cui la tesi segue per la positività dell'integrale su $\mathcal{G}(\mu)$, dal caso $\int_X |f| d\mu = +\infty$ che è banale.

Per quanto riguarda la seconda parte, la tesi segue osservando che

$$\forall P \in \mathcal{P}, \sum_{b \in P} |\mu_f(b)| = \sum_{b \in P} \left| \int_b f d\mu \right| \leq \sum_{b \in P} \int_b g d\mu = \int g d\mu,$$

da cui, sempre usando il teorema precedente, otteniamo:

$$\int |f| d\mu = |\mu_f|(1) = \sup_{P \in \mathcal{P}} \sum_{b \in P} |\mu_f(b)| \leq \int g d\mu.$$

□

4.7 Corollario

Siano:

- $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$ uno spazio gauge-misurabile.
- μ una misura di A.

Allora $\mathcal{G}^1(\mu)$ è chiuso rispetto a max e min.

Dimostrazione

Siano $f, g \in \mathcal{G}^1(\mu)$.

Allora

$$\max(f, g) = \frac{f + g + |f - g|}{2} \in \mathcal{G}^1(\mu)$$

e analogamente

$$\min(f, g) = -\max(-f, -g) \in \mathcal{G}^1(\mu).$$

Dall'arbitrarietà di f e g, segue la tesi.

□

4.8 Corollario (assoluta sommabilità delle funzioni continue)

Siano:

- $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$ uno spazio gauge-misurabile;
- μ una misura di A;
- $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continua come funzione da X con la topologia indotta da $\mathcal{I}$ in $\mathbb{R}$ con la topologia standard;

Allora $f \in \mathcal{G}^1(\mu)$.

Dimostrazione

Sappiamo che $f \in \mathcal{G}(\mu)$ e che $|f| \leq \max(-\min(f), \max(f)) \in \mathcal{G}(\mu)$, da cui la tesi.

□

4.9 Definizione

Se:

- $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$ è uno spazio gauge-misurabile;
- μ è una misura di A;

porremo

$$\begin{array}{rccc} \| \quad \|_\mu : & \mathcal{G}^1(\mu) & \longrightarrow & [0, +\infty) \\ & f & \longmapsto & \int |f| d\mu . \end{array}$$

4.10 Corollario

Siano:

- $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$ uno spazio gauge-misurabile;
- μ una misura di A;

allora $\left(\mathcal{G}^1(\mu), \| \quad \|_\mu\right)$ è uno spazio vettoriale seminormato.

Dimostrazione

Siano $f, g \in \mathcal{G}^1(\mu)$.

Allora poiché

$$|f + g| \leq |f| + |g|,$$

dal corollario precedente, segue che

$$|f + g| \in \mathcal{G}(\mu)$$

e dunque

$$f + g \in \mathcal{G}^1(\mu).$$

Dall'arbitrarietà di f e g, segue che $\mathcal{G}^1(\mu)$ è chiuso rispetto alla somma.

Che $\mathcal{G}^1(\mu)$ sia chiuso rispetto al prodotto per elementi di $\mathbb{R}$ è evidente.

Per quanto riguarda la dimostrazione del fatto che $\| \quad \|_\mu$ è una seminorma, l'unica proprietà non immediata da dimostrare è la disuguaglianza triangolare.

Siano dunque $f, g \in \mathcal{G}^1(\mu)$.
Sempre da

$$|f + g| \leq |f| + |g|,$$

segue che

$$\|f + g\|_\mu = \int |f + g| d\mu \leq \int (|f| + |g|) d\mu = \int |f| d\mu + \int |g| d\mu = \|f\|_\mu + \|g\|_\mu.$$

Dall'arbitrarietà di f e g, segue la tesi.

□

Capitolo 5. Derivazione e teoremi fondamentali del calcolo

5.1 Notazione

Se:

- $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$ è uno spazio gauge-misurabile;
- $x \in X$;
- $i \in \mathcal{I}(x)$;

indicheremo con $\mathcal{C}_i^0(x)$ l'insieme

$$\{(x, b) \in \mathcal{C} \mid 0 \neq b \leq i\}.$$

Qualora $i = 1$, $\mathcal{C}_i^0(x)$ verrà semplicemente indicato con $\mathcal{C}^0(x)$.

5.2 Lemma

Siano:

- $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$ uno spazio gauge-misurabile;
- (Y, τ) uno spazio topologico di Hausdorff;
- $x \in X$;
- $\not{f} : \mathrm{Supp}(\mathcal{C}^0(x)) \longrightarrow Y$;
- $y_1, y_2 \in Y$;

tali che:

- $\forall I \in \tau_{y_1}, \exists i \in \mathcal{I}(x), \forall b \in \mathrm{Supp}(\mathcal{C}_i^0(x)), \not{f}(b) \in I$;
- $\forall I \in \tau_{y_2}, \exists i \in \mathcal{I}(x), \forall b \in \mathrm{Supp}(\mathcal{C}_i^0(x)), \not{f}(b) \in I$.

Allora $y_1 = y_2$.

Dimostrazione

Supponiamo per assurdo non sia questo il caso. Siano dunque $I_1 \in \tau_{y_1}$ e $I_2 \in \tau_{y_2}$ disgiunti. Siano $i_1, i_2 \in \mathcal{I}(x)$ tali che:

- $\forall b \in \mathrm{Supp}\big(\mathcal{C}_{i_1}^0(x)\big), \not{f}(b) \in I_1$;
- $\forall b \in \mathrm{Supp}\big(\mathcal{C}_{i_2}^0(x)\big), \not{f}(b) \in I_2$.

Sappiamo che $i_1 \wedge i_2 \in \mathcal{I}(x)$ e che $\mathcal{C}_{i_1 \wedge i_2}^0(x) \neq \emptyset$. Sia dunque $b \in \mathrm{Supp}\big(\mathcal{C}_{i_1 \wedge i_2}^0(x)\big)$. Allora $b \in \mathcal{C}_{i_1}^0(x) \cap \mathcal{C}_{i_2}^0(x)$ e dunque $\not{f}(b) \in I_1 \cap I_2 = \emptyset$, assurdo.

□

5.3 Definizione

Se:

- $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$ è uno spazio gauge-misurabile;
- (Y, τ) è uno spazio topologico di Hausdorff;
- $x \in X$;
- $\not{f} : \mathrm{Supp}(\mathcal{C}^0(x)) \longrightarrow Y$;
- $y \in Y$;
- $\forall I \in \tau_y, \exists i \in \mathcal{I}(x), \forall b \in \mathrm{Supp}(\mathcal{C}_i^0(x)), \not{f}(b) \in I$;

diremo che $\not{f}$ ammette limite per b che va a x in $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$ e porremo

$$(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C}) - \lim_{b \downarrow x} \not{f}(b) \coloneqq y$$

o, se il riferimento a $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$ è evidente dal contesto, porremo semplicemente

$$\lim_{b \downarrow x} \not{f}(b) \coloneqq y.$$

5.4 Definizione

Se:

- $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$ è uno spazio gauge-misurabile;
- μ è una misura di A;
- $x \in X$;
- $\forall b \in \mathrm{Supp}(\mathcal{C}^0(x)), \mu(b) > 0$;

allora diremo che x è un *punto regolare* per μ in $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$.
Se ogni elemento di X è un punto regolare per μ in $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$, diremo che *$X$ è regolare per μ*.

5.5 Definizione

Se:

- $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$ è uno spazio gauge-misurabile;
- μ_1 è una misura di A a valori in $\mathbb{R}$;
- μ_2 è una misura di A;
- $x \in X$;
- x è un punto regolare per μ_2 in $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$;
- $\exists \lim_{b \downarrow x} \frac{\mu_1(b)}{\mu_2(b)} \in \mathbb{R}$;

diremo che *μ_1 è μ_2-derivabile in x in* $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$ e porremo

$$(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C}) - \frac{d\mu_1}{d\mu_2}(x) \coloneqq (X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C}) - \lim_{b \downarrow x} \frac{\mu_1(b)}{\mu_2(b)}$$

o, qualora il riferimento a $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$ sia evidente dal contesto, semplicemente

$$\frac{d\mu_1}{d\mu_2}(x) \coloneqq \lim_{b \downarrow x} \frac{\mu_1(b)}{\mu_2(b)}.$$

Qualora μ_1 sia μ_2-derivabile in ogni punto di X, diremo semplicemente che *μ_1 è μ_2-derivabile in* $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$.

5.6 Teorema (primo teorema fondamentale del calcolo)

Siano:

- $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$ uno spazio gauge-misurabile;
- μ una misura su A;
- $f \in \mathcal{G}(\mu)$;
- $x \in X$;

tali che:

- x è un punto regolare per μ in $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$;
- f è continua in x come funzione da X con la topologia indotta da $\mathcal{I}$ a valori in $\mathbb{R}$ con la topologia standard;

allora μ_f è μ-derivabile in x in $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$ e

$$\frac{d\mu_f}{d\mu}(x) = f(x).$$

Dimostrazione

Sia $\varepsilon > 0$.

Sia $i \in \mathcal{I}(x)$ tale che $\forall y \in \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(i)\,, |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$.

Allora

$$\begin{aligned}\forall b \in \mathrm{Supp}(\mathcal{C}_i^0(x))\,, \quad f(x) - \varepsilon &= \frac{\int_b (f(x) - \varepsilon) d\mu}{\mu(b)} \\ &\leq \frac{\int_b f\, d\mu}{\mu(b)} \\ &\leq \frac{\int_b (f(x) + \varepsilon) d\mu}{\mu(b)} \\ &\leq f(x) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di ε, si ha che

$$f(x) = \lim_{b \downarrow x} \frac{\int_b f d\mu}{\mu(b)} = \lim_{b \downarrow x} \frac{\mu_f(b)}{\mu(b)} = \frac{d\mu_f}{d\mu}(x).$$

□

5.7 Teorema (secondo teorema fondamentale del calcolo)

Siano:

- $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$ uno spazio gauge-misurabile;
- μ_1 è una misura su A a valori in $\mathbb{R}$;
- μ_2 è una misura su A;

tali che:

- X è regolare per μ_2 in $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$;
- μ_1 è μ_2-derivabile in $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$.

Allora:

- $\frac{d\mu_1}{d\mu_2} \in \mathcal{G}(\mu_2)$;
- $\forall a \in A, \mu_1(a) = \int_a \frac{d\mu_1}{d\mu_2} d\mu_2$.

Dimostrazione

Sia $\varepsilon > 0$. Per ogni $x \in X$, sia $i_x \in \mathcal{I}(x)$ tale che

$$\forall b \in \mathrm{Supp}\big(\mathcal{C}_{i_x}^0(x)\big)\,, \left|\frac{d\mu_1}{d\mu_2}(x) - \frac{\mu_1(b)}{\mu_2(b)}\right| \leq \frac{\varepsilon}{\mu_2(1)}.$$

Allora

$$\forall x \in X, \forall b \in \mathrm{Supp}\big(\mathcal{C}_{i_x}^0(x)\big)\,, \left|\frac{d\mu_1}{d\mu_2}(x)\, \mu_2(b) - \mu_1(b)\right| \leq \frac{\varepsilon\, \mu_2(b)}{\mu_2(1)}.$$

Poniamo

$$\begin{array}{rccc}\delta: & X & \longrightarrow & A \\ & x & \longmapsto & i_x.\end{array}$$

Abbiamo che

$$\begin{aligned}
\forall P^* \in \mathcal{P}^*(\delta)\,, \quad \left|\sum_{P^*} \frac{d\mu_1}{d\mu_2} \Delta\mu_2 - \mu_1(1)\right| \quad &= \quad \left|\sum_{(x,b)\in P^*} \frac{d\mu_1}{d\mu_2}(x)\, \mu_2(b) - \mu_1(1)\right| \\
&= \quad \left|\sum_{(x,b)\in P^*} \left(\frac{d\mu_1}{d\mu_2}(x)\, \mu_2(b) - \mu_1(b)\right)\right| \\
&\leq \quad \sum_{(x,b)\in P^*} \left|\frac{d\mu_1}{d\mu_2}(x)\, \mu_2(b) - \mu_1(b)\right| \\
&\leq \quad \sum_{(x,b)\in P^*} \frac{\varepsilon\, \mu_2(b)}{\mu_2(1)} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Dall’arbitrarietà di ε, segue che:

- $\frac{d\mu_1}{d\mu_2} \in \mathcal{G}(\mu_2)$;
- $\mu_1(1) = \int \frac{d\mu_1}{d\mu_2} d\mu_2$.

In maniera analoga, si dimostra che

$$\forall a \in A, \mu_1(a) = \int_a \frac{d\mu_1}{d\mu_2} d\mu_2.$$

□

Capitolo 6. Convergenza

6.1 Teorema (della convergenza monotona)

Siano:

- $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$ uno spazio gauge-misurabile;
- μ una misura su A;
- $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{G}(\mu)$;
- $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$;

tali che:

- $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \leq f_{n+1}$;
- $\forall x \in X, f(x) = \lim_{n\longrightarrow\infty} f_n(x)$.

Allora f è μ-integrabile in $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$ e

$$\int f d\mu = \lim_{n\longrightarrow\infty} \int f_n d\mu.$$

Dimostrazione

Prima di tutto osserviamo che esiste ed è diverso da $-\infty$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \int f_n d\mu.$$

Per comodità, poniamo

$$I = \lim_{n\longrightarrow\infty} \int f_n d\mu.$$

Sia $M < I$.

Sia $\varepsilon > 0$ tale che $\varepsilon(1 + \mu(1)) + M < I$.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $\delta_n \in \mathcal{G}$ tale che

$$\forall P^* \in \mathcal{P}^*(\delta_n)\,, \left|\sum_{P^*} f_n \Delta\mu - \int f_n d\mu\right| \leq \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Allora, per il lemma di Henstock, si ha che

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall F^* \in \mathcal{F}^*(\delta_n)\,, \sum_{(x,b)\in F^*} \left|f_n(x)\, \mu(b) - \int_b f_n d\mu\right| \leq \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Sia $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall n \geq N, \int f_n d\mu \geq \varepsilon(\mu(1) + 1) + M.$$

Se x è un elemento di X, sia $n_x \in \mathbb{N}$ tale che $n_x \geq N$ e $|f_{n_x}(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. Poniamo

$$\begin{array}{rccl} \delta : & X & \longrightarrow & A \\ & x & \longmapsto & \delta_{n_x}(x). \end{array}$$

Sia $P^* \in \mathcal{P}^*(\delta)$.

Osserviamo che:

$$\left|\sum_{P^*} f\Delta\mu - \sum_{(x,b)\in P^*} f_{n_x}(x)\, \mu(b)\right| \leq \sum_{(x,b)\in P^*} |f(x) - f_{n_x}(x)|\, \mu(b) \leq \varepsilon\, \mu(1).$$

Poniamo

$$K \coloneqq \{n \in \mathbb{N} \mid \exists x \in \mathrm{Point}(P^*)\,, n_x = n\}.$$

Poniamo

$$\forall k \in K, T_k^* = \{(x,b) \in P^* \mid n_x = k\}.$$

Osserviamo che

$$\forall k \in K, T_k^* \in \mathcal{F}^*(\delta_k).$$

Dunque

$$\begin{aligned}\sum_{(x,b)\in P^*} \left| f_{n_x}(x)\,\mu(b) - \int_b f_{n_x} d\mu \right| &= \sum_{k\in K} \sum_{(x,b)\in T_k^*} \left| f_k(x)\,\mu(b) - \int_b f_k d\mu \right| \\ &\leq \sum_{k\in K} \frac{\varepsilon}{2^k} \leq \varepsilon.\end{aligned}$$

Inoltre, osservando che

$$\sum_{(x,b)\in P^*} \int_b f_{n_x} d\mu \geq \sum_{(x,b)\in P^*} \int_b f_N d\mu \geq \varepsilon(1+\mu(1)) + M,$$

otteniamo che

$$\begin{aligned}&\sum_{P^*} f\Delta\mu = \\ &= \sum_{P^*} f\Delta\mu - \sum_{(x,b)\in P^*} f_{n_x}(x)\,\mu(b) + \sum_{(x,b)\in P^*} f_{n_x}(x)\,\mu(b) - \sum_{(x,b)\in P^*} \int_b f_{n_x} d\mu + \sum_{(x,b)\in P^*} \int_b f_{n_x} d\mu \\ &\geq -\left| \sum_{P^*} f\Delta\mu - \sum_{(x,b)\in P^*} f_{n_x}(x)\,\mu(b) \right| - \sum_{(x,b)\in P^*} \left| f_{n_x}(x)\,\mu(b) - \int_b f_{n_x} d\mu \right| + \sum_{(x,b)\in P^*} \int_b f_{n_x} d\mu \\ &\geq -\varepsilon\,\mu(1) - \varepsilon + \sum_{(x,b)\in P^*} \int_b f_N d\mu \geq -\varepsilon(\mu(1)+1) + \int f_N d\mu \\ &\geq -\varepsilon(\mu(1)+1) + \varepsilon(\mu(1)+1) + M = M.\end{aligned}$$

D’altra parte

$$\begin{aligned}&\sum_{P^*} f\Delta\mu = \\ &= \sum_{P^*} f\Delta\mu - \sum_{(x,b)\in P^*} f_{n_x}(x)\,\mu(b) + \sum_{(x,b)\in P^*} f_{n_x}(x)\,\mu(b) - \sum_{(x,b)\in P^*} \int_b f_{n_x} d\mu + \sum_{(x,b)\in P^*} \int_b f_{n_x} d\mu \\ &\leq \left| \sum_{P^*} f\Delta\mu - \sum_{(x,b)\in P^*} f_{n_x}(x)\,\mu(b) \right| + \sum_{(x,b)\in P^*} \left| f_{n_x}(x)\,\mu(b) - \int_b f_{n_x} d\mu \right| + \sum_{(x,b)\in P^*} \int_b f_{n_x} d\mu \\ &\leq \varepsilon\,\mu(1) + \varepsilon + \sum_{(x,b)\in P^*} \int_b f_{\max(K)} d\mu + I \leq \varepsilon(\mu(1)+1) + \int f_{\max(K)} d\mu \leq \varepsilon(\mu(1)+1) + I.\end{aligned}$$

Concludiamo che

$$M \leq \sum_{P^*} f\Delta\mu \leq \varepsilon(1+\mu(1)) + I.$$

Dall’arbitrarietà di P^*, ε e M, segue la tesi.

$\square$

6.2 Corollario

Siano:

- $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$ uno spazio gauge-misurabile;
- μ una misura su A;
- $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{G}(\mu)$;
- $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$;

tali che:

- $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \geq f_{n+1}$;
- $\forall x \in X, f(x) = \lim_{n\longrightarrow\infty} f_n(x)$.

Allora f è μ-integrabile in $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$ e

$$\int f d\mu = \lim_{n\longrightarrow\infty} \int f_n d\mu.$$

Dimostrazione

È sufficiente considerare $\{-f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e applicare il teorema della convergenza monotona.

□

6.3 Lemma

Siano:

- $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$ uno spazio gauge-misurabile;
- μ una misura su A;
- $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{G}(\mu)$;

tali che

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X, 0 \leq f_n(x).$$

Allora

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n \in \mathcal{G}(\mu).$$

Dimostrazione

Si osservi che

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| = f_n \in \mathcal{G}(\mu)$$

e dunque

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{G}^1(\mu),$$

da cui

$$\forall k \in \mathbb{N}, \inf_{i\in\{1,\dots,k\}} f_i \in \mathcal{G}^1(\mu)$$

e

$$\inf_{i\in\{1,\dots,k\}} f_i \downarrow \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n.$$

Per il corollario del teorema della convergenza monotona, abbiamo che $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ è μ-integrabile in $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$ e, poiché

$$0 \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n.$$

abbiamo che

$$0 \leq \int \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n \, d\mu \leq \int f_1 d\mu < +\infty$$

e quindi

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n \in \mathcal{G}(\mu).$$

□

6.4 Teorema (lemma di Fatou)

Siano:

- $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$ uno spazio gauge-misurabile;
- μ una misura su A;
- $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{G}(\mu)$;
- $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$;

tali che:

- $\forall x \in X, f(x) = \operatorname{liminf}_{n\longrightarrow\infty} f_n(x)$;
- $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X, f_n(x) \geq 0.$

Allora f è μ-integrabile in $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$ e

$$\int f d\mu \leq \liminf_{n\longrightarrow\infty} \int f_n d\mu.$$

Dimostrazione

Poniamo

$$\forall n \in \mathbb{N}, g_n := \inf_{n\leq k} f_k.$$

Osserviamo che

$$\forall n \in \mathbb{N}, g_n \in \mathcal{G}(\mu).$$

Inoltre

$$\forall n \in \mathbb{N}, g_n \leq f_n$$

e dunque

$$\forall k \in \mathbb{N}, \int g_n d\mu \leq \int f_n d\mu.$$

Pure

$$\forall n \in \mathbb{N}, g_n \leq g_{n+1}.$$

Dunque, poiché

$$\forall x \in X, \lim_{n\longrightarrow\infty} g_n(x) = \liminf_{n\longrightarrow\infty} f_n(x) = f(x),$$

siamo nelle ipotesi del teorema della convergenza monotona, per cui f è μ-integrabile in $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$ e

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \int g_n d\mu = \int f d\mu.$$

Dunque

$$\int f d\mu = \lim_{n\longrightarrow\infty} \int g_n d\mu = \liminf_{n\longrightarrow\infty} \int g_n d\mu \leq \liminf_{n\longrightarrow\infty} \int f_n d\mu,$$

ossia la tesi.

□

6.5 Teorema (della convergenza dominata)

Siano:

- $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$ uno spazio gauge-misurabile;
- μ una misura su A;
- $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{G}(\mu)$;
- $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$;
- $g \in \mathcal{G}(\mu)$;

Tali che:

- $\forall x \in X, \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$;
- $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq g$.

Allora:

- $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{G}^1(\mu)$;
- $f \in \mathcal{G}^1(\mu)$;
- $\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| d\mu = 0$;
- $\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$.

Dimostrazione

Che $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{G}^1(\mu)$, è evidente dal corollario 4.6.

Per il lemma di Fatou, abbiamo che $f \in \mathcal{G}(\mu)$ e poiché $|f| \leq g$, abbiamo, sempre per il corollario 4.6 che $f \in \mathcal{G}^1(\mu)$.

Dunque $\forall n \in \mathbb{N}, f_n - f \in \mathcal{G}^1(\mu)$ e quindi $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n - f| \in \mathcal{G}(\mu)$.

Poiché $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n - f| \leq 2g$, possiamo applicare il lemma di Fatou alla funzione

$$2g - |f_n - f|$$

e ottenere:

$$\begin{aligned}\int 2g d\mu &\leq \liminf_{n\to\infty} \int (2g - |f_n - f|) d\mu \\ &= \int 2g d\mu + \liminf_{n\to\infty} \left(-\int |f_n - f| d\mu\right) \\ &= \int 2g d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f| d\mu .\end{aligned}$$

Poiché $\int_X 2g d\mu \in \mathbb{R}$, possiamo sottrarlo da ambo i membri e ottenere

$$\limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f| d\mu \leq 0$$

e poiché

$$0 \leq \liminf_{n\to\infty} \int |f_n - f| d\mu \leq \limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f| d\mu \leq 0,$$

otteniamo:

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| d\mu = 0.$$

Inoltre

$$\left(\limsup_{n\to\infty} \int |f_n| d\mu\right) - \int |f| d\mu = \limsup_{n\to\infty} \int (|f_n| - |f|) d\mu \leq \limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f| d\mu = 0,$$

da cui

$$\limsup_{n\to\infty}\int|f_n|d\mu \leq \int|f|d\mu$$

e

$$\int|f|d\mu - \left(\liminf_{n\to\infty}\int|f_n|d\mu\right) = \limsup_{n\to\infty}\int(|f|-|f_n|)d\mu \leq \limsup_{n\to\infty}\int|f_n - f|d\mu = 0,$$

da cui

$$\int|f|d\mu \leq \liminf_{n\to\infty}\int|f_n|d\mu.$$

Dunque

$$\limsup_{n\to\infty}\int|f_n|d\mu \leq \int|f|d\mu \leq \liminf_{n\to\infty}\int|f_n|d\mu \leq \limsup_{n\to\infty}\int|f_n|d\mu,$$

da cui

$$\lim_{n\to\infty}\int|f_n|d\mu = \int|f|d\mu.$$

□

Capitolo 7. Regolarità topologica

7.1 Lemma

Siano:

- $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$ uno spazio gauge-misurabile;
- μ una misura su A;
- $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$;

tali che per ogni $\varepsilon > 0$ esistono g_1, g_2 in $\mathcal{G}(\mu)$ per i quali si ha:

- $g_1 \leq f \leq g_2$.
- $\int g_2 d\mu \leq \int g_1 d\mu + \varepsilon$.

Allora $f \in \mathcal{G}(\mu)$.

Dimostrazione

Sia $\varepsilon > 0$.
Siano $g_1, g_2 \in \mathcal{G}(\mu)$ come nelle ipotesi del lemma.
Siano $\delta_1, \delta_2 \in \mathcal{G}$ tali che:

- $\forall P^* \in \mathcal{P}^*(\delta_1)\,, |\sum_{P^*} g_1 \Delta\mu - \int g_1 d\mu| \leq \varepsilon$;
- $\forall P^* \in \mathcal{P}^*(\delta_2)\,, |\sum_{P^*} g_2 \Delta\mu - \int g_1 d\mu| \leq \varepsilon$.

Allora

$$\forall P^* \in \mathcal{P}^*(\delta_1 \wedge \delta_2)\,, \quad \begin{aligned} \int g_1 d\mu - \varepsilon &\leq \sum_{P^*} g_1 \Delta\mu \\ &\leq \sum_{P^*} f \Delta\mu \\ &\leq \sum_{P^*} g_2 \Delta\mu \\ &\leq \int g_2 d\mu + \varepsilon \\ &\leq \int g_1 d\mu + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Dunque

$$\forall P^* \in \mathcal{P}^*(\delta_1 \wedge \delta_2)\,, \left|\sum_{P^*} f\Delta\mu - \int g_1 d\mu\right| \leq 2\varepsilon.$$

Quindi

$$\forall P_1^*, P_2^* \in \mathcal{P}^*(\delta_1 \wedge \delta_2)\,, \quad \begin{aligned} \left|\sum_{P_1^*} f\Delta\mu - \sum_{P_2^*} f\Delta\mu\right| &\leq \left|\sum_{P_1^*} f\Delta\mu - \int g_1 d\mu + \int g_1 d\mu - \sum_{P_2^*} f\Delta\mu\right| \\ &\leq \left|\sum_{P_1^*} f\Delta\mu - \int g_1 d\mu\right| + \left|\int g_1 d\mu - \sum_{P_2^*} f\Delta\mu\right| \\ &\leq 4\varepsilon. \end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di ε e dal criterio di Cauchy, segue la tesi.

□

7.2 Notazione
Se:
- X è un insieme;
- $E \subset X$;

indicheremo con χ_E la funzione caratteristica di E.

7.3 Notazione
Se:
- X è un insieme;
- A è un'algebra di Boole;
- $\mathcal{I}$ è un sistema di intorni regolare di X in A;
- $a \in A$;

porremo $R_a = \{b \in A \mid \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(b) \subset \mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(a)\}$.

7.4 Definizione
Se:
- X è un insieme;
- A è un'algebra di Boole;
- $\mathcal{I}$ è un sistema di intorni regolare di X in A;
- μ è una misura su A;
- $\forall a \in A^0, \mu(a) = \sup_{b \in R_a} \mu(b)$;

diremo che μ è *topologicamente regolare* in $(X, A, \mathcal{I})$.

7.5 Teorema
Siano:
- $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{C})$ uno spazio gauge-misurabile;
- μ una misura su A topologicamente regolare in $(X, A, \mathcal{I})$;
- $a_0 \in A$;
- $E \subset 2^X$;

tali che $\mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(a_0) \subset E \subset \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(a_0)$.
Allora:
- $\chi_E \in \mathcal{G}(\mu)$.
- $\int \chi_E d\mu = \mu(a_0)$.

Dimostrazione
Sia $a \in A$.
Sia $\varepsilon > 0$.
Sia $b \in R_a$ tale che $\mu(a) - \varepsilon \leq \mu(b)$.
Definiamo

$$\begin{array}{rccl} \delta: & X & \longrightarrow & A \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} a \; se \; x \in \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(b) \\ \neg a \; se \; x \in X \setminus \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(b) \end{cases}. \end{array}$$

Sia $P^* \in \mathcal{P}^*(\delta)$.
Sia $P_b^* = \{(x, c) \in P^*(\delta) \mid x \in \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(b)\}$.

Osserviamo che $P_b^* \in \mathcal{P}_b^*(\delta_{|b})$.
Allora

$$\left|\sum_{P^*} \chi_{\mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(a)} \Delta\mu - \mu(a)\right| = \left|\sum_{P_b^*} \chi_{\mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(a)} \Delta\mu - \mu(a)\right| = |\mu(b) - \mu(a)| \leq \varepsilon.$$

Dall'arbitrarietà di P^* e ε, segue che $\chi_{\mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(a)} \in \mathcal{G}(\mu)$ e

$$\int \chi_{\mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(a)} d\mu = \mu(a).$$

Dall'arbitrarietà di a, segue che

$$\forall a \in A, \int \chi_{\mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(a)} d\mu = \mu(a).$$

Dunque

$$\forall a \in A, \mu(a) = \mu(1) - \mu(\neg a) = \int 1 d\mu - \int \chi_{\mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(\neg a)} d\mu = \int \left(1 - \chi_{\mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(\neg a)}\right) d\mu = \int \chi_{\mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(a)} d\mu.$$

Allora, poiché

$$\chi_{\mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(a_0)} = \chi_{\mathrm{Int}(E)} \leq \chi_E \leq \chi_{\mathrm{Cl}(E)} = \chi_{\mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(a_0)},$$

otteniamo che

$$\chi_E \in \mathcal{G}(\mu)$$

e, poiché

$$\mu(a_0) = \int \chi_{\mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(a_0)} d\mu \leq \int \chi_E d\mu \leq \int \chi_{\mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(a_0)} d\mu = \mu(a_0),$$

si ha che

$$\int \chi_E d\mu = \mu(a_0),$$

cioè la tesi.

□

7.6 Teorema

Siano:

- $(X, A, \mathcal{J}, B, \mathcal{C})$ uno spazio gauge-misurabile;
- μ una misura su A topologicamente regolare in $(X, A, \mathcal{J})$;
- $f \in \mathcal{G}(\mu)$;
- $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$;
- $a_1, a_2 \in A$;

tali che:

- $a_1 \leq a_2$;
- $\mu(a_1) = \mu(a_2)$;
- $\{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\} \subset \mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(a_2) \setminus \mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(a_1)$;

Allora:

- $g \in \mathcal{G}(\mu)$;
- $\int_X g d\mu = \int_X f d\mu$.

Dimostrazione

Poniamo $E = \mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(a_2) \setminus \mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(a_1)$.

Se $a_1 < a_2$, osserviamo che $E = \mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(a_2 \setminus a_1)$ e dunque, grazie al teorema precedente, $\chi_E \in \mathcal{G}(\mu)$.

Se $a_1 = a_2$, allora $E = \partial_{\mathcal{J}}(a_1)$ e, ancora grazie al teorema precedente, si a che $\chi_{\partial_{\mathcal{J}}(a_1)} = \chi_{\mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(a_1)} - \chi_{\mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(a_1)} \in \mathcal{G}(\mu)$.

In entrambi i casi, osserviamo che $\int \chi_E d\mu = 0$.

Poniamo $h = f - g$.

Poniamo $\forall n \in \mathbb{N}, h_n = \min(|h|, n\chi_E)$.

È evidente che:

- $\forall n \in \mathbb{N}, h_n \leq h_{n+1}$;
- $\forall x \in X, \lim_{n\to\infty} h_n(x) = |h(x)|$.

Inoltre, poiché:

- $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq h_n \leq n\chi_E$;
- $\int 0 d\mu = 0 = n \int \chi_E d\mu = \int n\chi_E d\mu$;

si ha, per il lemma precedente, che $\forall n \in \mathbb{N}, h_n \in \mathcal{G}(\mu)$ e, per le proprietà di monotonia dell'integrale

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int h_n d\mu = 0.$$

Dunque, per il teorema della convergenza monotona, si ha che:

- $|h| \in \mathcal{G}(\mu)$;
- $\int |h| d\mu = 0$.

Dunque, poiché:

- $-|h| \leq h \leq |h|$;
- $\int (-|h|) d\mu = 0 = \int |h| d\mu$;

si ha, per il lemma precedente, che $h \in \mathcal{G}(\mu)$ e, per le proprietà di monotonia dell'integrale

$$\int h d\mu = 0.$$

Dunque

$$g = f - h \in \mathcal{G}(\mu)$$

e

$$\int g d\mu = \int (f - h) d\mu = \int f d\mu - \int h d\mu = \int f d\mu,$$

ossia la tesi.

□

Capitolo 8. Relazioni con l'integrale di McShane e di Henstock

Gli integrali di McShane e di Henstock

Vogliamo ora mostrare come la teoria fin qui sviluppata contempli al suo interno l'integrale di McShane e l'integrale di Henstock in $\mathbb{R}^n$.
Penseremo $\mathbb{R}^n$ munito della topologia standard.
Sia X un rettangolo chiuso di $\mathbb{R}^n$ con lati paralleli agli assi coordinati.
Sia $\mathcal{R}$ l'algebra dei plurirettangoli con lati paralleli agli assi coordinati (eventualmente degeneri, contenenti o meno il bordo o soltanto parte di esso) contenuti in X.
Sia $\sim \coloneqq \{(R_1, R_2) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R} \mid \mathrm{Clint}(R_1) = \mathrm{Clint}(R_2)\}$.
Poniamo $A \coloneqq \mathcal{R}/\sim$.
È evidente che le seguenti applicazioni sono ben definite:

- $\wedge: A \times A \longrightarrow A, ([R_1]_\sim, [R_2]_\sim) \longmapsto [R_1 \cap R_2]_\sim;$
- $\vee: A \times A \longrightarrow A, ([R_1]_\sim, [R_2]_\sim) \longmapsto [R_1 \cup R_2]_\sim;$
- $\neg: A \longrightarrow A, [R]_\sim \longmapsto [X \backslash R]_\sim;$
- $0 = [\emptyset]_\sim;$
- $1 = [X]_\sim.$

È altrettanto evidente che $(A, \wedge, \vee, \neg, 0, 1)$ è un'algebra di Boole.
Poniamo

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{I}: & X & \longrightarrow & \wp(A) \\ & x & \longmapsto & \{[R]_\sim \in A \mid x \in \mathrm{Int}(\mathrm{Clint}(R))\}. \end{array}$$

È evidente che tale applicazione è ben definita e che $\mathcal{I}$ è un sistema fondamentale di intorni regolare di X e A.
Osserviamo che la topologia indotta da $\mathcal{I}$ su X, coincide con la topologia naturale di X.
Poniamo $B \coloneqq \{[R]_\sim \in A \mid R \text{ è } un\ rettangolo\}$.
È evidente che B è un semianello di A che genera A.
Arriva ora la prima distinzione tra i due integrali, precisamente nel sistema di coppie fondamentali:

- nel caso di McShane, questa sarà data da $\mathcal{M} \coloneqq X \times B$;
- nel caso di Henstock, questa sarà data da $\mathcal{H} \coloneqq \{(x, b) \in X \times B \mid x \in \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(b)\}$.

Il lemma di Cousin (si veda [Swa01]) garantisce che $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{H})$ è uno spazio gauge-misurabile e, quindi, anche $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{M})$ lo è.
Infine, per ottenere gli integrali, è sufficiente, indicata con μ_X la misura di Lebesgue definita sui boreliani di X, considerare la misura su A

$$\begin{array}{cccc} \mu: & A & \longrightarrow & [0, +\infty) \\ & [R]_\sim & \longmapsto & \mu_X(R) \end{array}$$

che, evidentemente, è ben definita.

Allora, ricordando le definizioni di integrale di McShane e di Henstock, è evidente che:

- $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ è McShane integrabile in X se e solo se f è μ-integrabile in $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{M})$. In tal caso si ha che $\forall R \in \mathcal{R}, \int_R f d\mu_X = (X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{M}) - \int_{[R]_\sim} f d\mu$, dove il primo membro indica l'integrale di McShane di f;
- $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ è Henstock integrabile in X se e solo se f è μ-integrabile in $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{H})$. In tal caso si ha che $\forall R \in \mathcal{R}, \int_R f d\mu_X = (X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{H}) - \int_{[R]_\sim} f d\mu$, dove il primo membro indica l'integrale di Henstock di f.

La derivata

Per quanto riguarda la derivata, poiché un'analoga definizione a quella data non sussiste (o perlomeno non è standard) per l'integrale di McShane e di Henstock in $\mathbb{R}^n$ con n generico, ci restringeremo al caso in cui $n = 1$ e, quindi $X = [x_1, x_2]$ con $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.
In tal caso, ad ogni funzione continua:

$$F : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

può essere associata una funzione additiva:

$$\mu_F^* : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

definita come quell'unica funzione additiva per la quale su ogni intervallo $I \subset X$ di estremi s e t (arbitrariamente inclusi od esclusi), si abbia che

$$\mu_F^*(I) = F(t) - F(s).$$

Allora, è ben definita la funzione

$$\begin{array}{rccc} \mu_F : & A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & [R]_\sim & \longmapsto & \mu_F(R) \end{array}$$

che, chiaramente, è una misura su A.
Viceversa, ad ogni misura μ_1 su A, è possibile associare una funzione additiva sui plurirettangoli ponendo

$$\begin{array}{rccc} \mu_1^* : & \mathcal{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & R & \longmapsto & \mu_1([R]_\sim) \end{array}$$

ed è chiaro che, se F è una cumulativa per μ_1^* allora, poiché μ_1^* è nulla sugli insiemi costituiti di un solo punto, F è continua e $\mu_F = \mu_1$.
Segue allora che possiamo associare ad ogni misura su A una famiglia di funzioni continue su X (due cumulative qualsiasi differiscono per una costante), in maniera tale che sia soddisfatta l'identità sopra.
A questo punto, supponiamo che F sia una funzione continua assegnata.
Riscriviamo il rapporto incrementale di F in $x \in X$ con incremento $h > 0$ come

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{F(x+h) - F(x)}{(x+h) - x} = \frac{\mu_F\left([[x, x+h]]_\sim\right)}{\mu\left([[x, x+h]]_\sim\right)}$$

e analogamente, se l'incremento è $h < 0$, otteniamo

$$\frac{F(x) - F(x+h)}{h} = \frac{\mu_F\left([[x+h, x]]_\sim\right)}{\mu\left([[x+h, x]]_\sim\right)}.$$

Lo straddle lemma (si veda [Swa01]) ci garantisce che, se F è derivabile in x, allora

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall s, t \in X, \text{ se } s \leq x \leq t \text{ e } 0 < t - s \leq \delta, \text{ allora } \left|\frac{F(t)-F(s)}{t-s} - F'(x)\right| \leq \varepsilon,$$

che, tradotto nel linguaggio degli spazi gauge-misurabili, osservando preliminarmente che

$$|t - s| = \mu\left([[s,t]]_\sim\right),$$

equivale a dire che μ_F è μ-derivabile in x in $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{H})$ e

$$(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{H}) - \frac{d\mu_F}{d\mu}(x) = F'(x).$$

Di conseguenza, la derivata in $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{H})$ di μ_F rispetto a μ coincide con la derivata usuale di F. Andiamo ora a capire il perché per l'integrale di McShane non vale il secondo teorema fondamentale del calcolo. Questa volta, traducendo la definizione di derivata nel linguaggio classico, abbiamo che μ_F è derivabile rispetto a μ in $(X, A, \mathcal{I}, B, \mathcal{M})$ se e solo se

$$\exists D \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall s, t \in [x - \delta, x + \delta], \text{ se } s < t \text{ allora } \left|\frac{F(t)-F(s)}{t-s} - D\right| \leq \varepsilon.$$

Chiaramente, questa condizione, nota come stretta derivabilità, implica la derivabilità classica ma non è vero il viceversa.

Un esempio di funzione derivabile in senso classico ma non derivabile in senso stretto è dato dalla funzione

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 0 \; se \; x = 0 \\ x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) \; se \; x \neq 0. \end{cases} \end{array}$$

È chiaro a questo punto che la ragione per la quale il secondo teorema fondamentale del calcolo fallisce per l'integrale di McShane è che non si è utilizzata la naturale definizione di derivabilità per questo procedimento di integrazione.

Capitolo 9. Relazioni con l'integrale di Lebesgue

L'integrale di Lebesgue ha bisogno di uno spazio di misura per essere definito. Giacché nel contesto dell'integrale astratto di gauge questo spazio di misura non appare, dovremo prima di tutto dotare il dominio di una sigma-algebra e di una misura. Inoltre, giacché l'integrale di Lebesgue è un integrale assoluto, il naturale candidato nel nostro contesto per effettuare un paragone sarà uno spazio gauge-misurabile $(X, A, \mathcal{I}, B, X \times B)$. Nello specifico, supporremo per il resto del capitolo che:

- $(X, A, \mathcal{I}, B, X \times B)$ sia uno spazio gauge-misurabile;
- μ sia una misura su A;
- $(X, \tau(A, \mathcal{I}))$ sia uno spazio topologico di Hausdorff;
- $\mathcal{E}$ sia la sigma-algebra di Borel su X determinata da $\tau(A, \mathcal{I})$;
- $\bar{\mu} : \mathcal{E} \longrightarrow [0, +\infty)$ sia una misura di Radon;
- $\forall a \in A, \mu(a) = \bar{\mu}(\mathrm{Int}_{\mathcal{I}}(a)) = \bar{\mu}(\mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(a))$.

Sotto tali condizioni, mostreremo che se $f \in L^1(X, \mathcal{E}, \bar{\mu})$ allora $f \in \mathcal{G}(\mu)$ e

$$\int f d\bar{\mu} = \int f d\mu.$$

La ragione per la quale assumeremo che la misura sia di Radon deriva dal fatto che senza tale condizione esistono controesempi per i quali non vale la tesi (si veda [AP86]). Le seguenti linee dimostrative derivano essenzialmente da [AP86].

9.1 Teorema

Sia $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continua come funzione da X con la topologia indotta da $\mathcal{I}$ in $\mathbb{R}$ con la topologia standard. Allora

$$\int f d\bar{\mu} = \int f d\mu.$$

Dimostrazione

Sia $\varepsilon > 0$.

Sia $\forall x \in X, i_x \in \mathcal{I}(x)$ tale che $\forall y \in \mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(i_x), |f(y) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{\mu(1)+1}$.

Poniamo

$$\begin{array}{cccc} \delta : & X & \longrightarrow & A \\ & x & \longmapsto & i_x. \end{array}$$

Sia $P^* \in \mathcal{P}^*(\delta)$.

Allora

$$\begin{aligned} \left| \sum_{P^*} f \Delta\mu - \int f d\bar{\mu} \right| &= \left| \sum_{(x,b) \in P^*} \left(f(x)\, \mu(b) - \int_{\mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(b)} f d\bar{\mu} \right) \right| \\ &\leq \sum_{(x,b) \in P^*} \left| f(x)\, \mu(b) - \int_{\mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(b)} f d\bar{\mu} \right| \\ &= \sum_{(x,b) \in P^*} \left| \int_{\mathrm{Cl}_{\mathcal{I}}(b)} (f(x) - f) d\bar{\mu} \right| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{(x,b)\in P^*} \int_{\mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(b)} |f(x) - f| d\bar{\mu} \\
&\leq \sum_{(x,b)\in P^*} \int_{\mathrm{Cl}_{\mathcal{J}}(b)} \frac{\varepsilon}{\mu(1)+1} d\bar{\mu} \\
&= \sum_{(x,b)\in P^*} \frac{\varepsilon\,\mu(b)}{\mu(1)+1} \leq \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Dall'arbitrarietà di ε, segue la tesi.

□

9.2 Teorema

Siano:

- $Y \subset X$;
- $E \in \mathcal{E}$;

tali che:

- $Y \subset E$;
- $\bar{\mu}(E) = 0$.

Allora $\chi_Y \in \mathcal{G}(\mu)$ e

$$\int \chi_Y d\mu = 0.$$

Dimostrazione

Sia $\varepsilon > 0$. Sia $T \in \tau(A, \mathcal{J})$ tale che $E \subset T$ e $\bar{\mu}(T) \leq \varepsilon$. Se $x \in T$, sia $a_x \in A$ tale che $x \in \mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(a) \subset T$. Sia $\delta \in \mathcal{G}$ tale che $\forall x \in T, \delta(x) = a_x$.
Sia $P^* \in \mathcal{G}(\delta)$.
Allora

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{P^*} \chi_Y \Delta\mu - 0\right| &= \sum_{P^*} \chi_Y \Delta\mu = \sum_{(x,b)\in P^*} \chi_Y(x)\,\mu(b) \leq \sum_{(x,b)\in P^*} \chi_E(x)\,\mu(b) \\
&\leq \sum_{(x,b)\in P^*} \chi_T(x)\,\mu(b) = \sum_{(x,b)\in P^*} \chi_T(x)\,\bar{\mu}(\mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(b)) \\
&= \sum_{\substack{(x,b)\in P^* \\ x\in T}} \bar{\mu}(\mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(b)) = \bar{\mu}\left(\bigcup_{\substack{(x,b)\in P^* \\ x\in T}} \mathrm{Int}_{\mathcal{J}}(b)\right) \\
&\leq \bar{\mu}(T) \leq \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Dall'arbitrarietà di ε, segue la tesi.

□

9.3 Teorema

Siano:

- $f \in \mathcal{G}(\mu)$;
- $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$;
- $E \in \mathcal{E}$;

tali che:

- $\{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\} \subset E$;
- $\bar{\mu}(E) = 0$.

Allora $g \in \mathcal{G}(\mu)$ e

$$\int f d\mu = \int g d\mu.$$

Dimostrazione

Identica alla dimostrazione del teorema 7.6.

□

9.4 Teorema

Sia $E \in \mathcal{E}$. Allora $\chi_E \in \mathcal{G}(\mu)$ e

$$\int \chi_E d\mu = \bar{\mu}(E).$$

Dimostrazione

Sia K un compatto di $(X, \tau(A, \mathcal{I}))$.

Sia $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \tau(A, \mathcal{I})$ tale che:

- $\forall n \in \mathbb{N}, K \subset T_{n+1} \subset T_n$;
- $\bar{\mu}(K) = \lim_{n\to\infty} \bar{\mu}(T_n)$.

Per il lemma di Urysohn (si veda [Rud06]), quale che sia $n \in \mathbb{N}$, è possibile trovare funzioni continue f_n tali che:

- $\forall x \in K, f_n(x) = 1$;
- $\forall x \in T_n^c, f_n(x) = 0$;
- $\forall x \in X, 0 \leq f_n(x) \leq 1$.

Poniamo $T = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} T_n$.

Allora:

- $T \in \mathcal{E}$;
- $K \subset T$;
- $\bar{\mu}(T \backslash K) = \bar{\mu}(T) - \bar{\mu}(K) = 0$.

Osserviamo che:

- $\forall x \in K, \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1 = \chi_K(x)$;
- $\forall x \in T^c, \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = \chi_K(x)$.

Definiamo, quale che sia $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{rccl} g_n : & X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} f_n(x) & se\ x \in X\backslash(T\backslash K) \\ 0 & se\ x \in T\backslash K. \end{cases} \end{array}$$

Osservando, per il teorema 9.1, che:

- $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{G}(\mu)$;
- $\forall n \in \mathbb{N}, \int f_n d\mu = \int f_n d\bar{\mu}$;

allora, per il teorema 9.3, abbiamo che:

- $\forall n \in \mathbb{N}, g_n \in \mathcal{G}(\mu)$;
- $\forall n \in \mathbb{N}, \int g_n d\mu = \int f_n d\mu = \int f_n d\bar{\mu}$.

Dunque, osservando che:

- $\forall x \in X, \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \chi_K(x)$;
- $\forall n \in \mathbb{N}, g_n \leq 1 \in \mathcal{G}(\mu)$;

per il teorema della convergenza dominata 6.5 e per il teorema della convergenza dominata della teoria di Lebesgue, abbiamo che $\chi_K \in \mathcal{G}(\mu)$ e

$$\int \chi_K d\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\bar{\mu} = \int \chi_K d\bar{\mu} = \bar{\mu}(K).$$

Dall'arbitrarietà di K, segue che $\forall K \in \wp(X)$, se K è un compatto di $(X, \tau(A, \mathcal{J}))$, allora:

- $\chi_K \in \mathcal{G}(\mu)$;
- $\int \chi_K d\mu = \bar{\mu}(K)$.

Ora, sia $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \wp(X)$ tale che:

- $\forall n \in \mathbb{N}, K_n$ è un compatto di $(X, \tau(A, \mathcal{J}))$;
- $\forall n \in \mathbb{N}, K_n \subset K_{n+1} \subset E$;
- $\bar{\mu}(E) = \lim_{n\to\infty} \bar{\mu}(K_n)$.

Poniamo $K = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$.

Allora:

- $K \in \mathcal{E}$;
- $K \subset E$;
- $\bar{\mu}(E\backslash K) = \bar{\mu}(E) - \bar{\mu}(K) = 0$.

Osserviamo che:

- $\forall x \in K, \lim_{n\to\infty} \chi_{K_n}(x) = 1 = \chi_E(x)$;
- $\forall x \in E^c, \lim_{n\to\infty} \chi_{K_n}(x) = 0 = \chi_E(x)$.

Definiamo, quale che sia $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{rccl} h_n: & X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} \chi_{K_n}(x) & se\ x \in X\backslash(E\backslash K) \\ 1 & se\ x \in E\backslash K. \end{cases} \end{array}$$

Osserviamo, per il teorema 9.3, che:

- $\forall n \in \mathbb{N}, h_n \in \mathcal{G}(\mu)$;
- $\forall n \in \mathbb{N}, \int h_n d\mu = \int \chi_{K_n} d\mu = \bar{\mu}(K_n)$.

Inoltre:

- $\forall x \in X, \lim_{n\to\infty} h_n(x) = \chi_E(x)$;
- $\forall n \in \mathbb{N}, h_n \leq 1 \in \mathcal{G}(\mu)$.

Dunque, per il teorema della convergenza dominata 6.5 abbiamo che $\chi_E \in \mathcal{G}(\mu)$ e

$$\int \chi_E d\mu = \lim_{n\to\infty} \int h_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \bar{\mu}(K_n) = \bar{\mu}(E),$$

ossia la tesi.

□

9.5 Teorema

Sia $f \in L^1(X, \mathcal{E}, \bar{\mu})$.
Allora $f \in \mathcal{G}(\mu)$ e

$$\int f d\bar{\mu} = \int f d\mu.$$

Dimostrazione

Dal teorema 9.4, abbiamo che ogni funzione caratteristica di un elemento di $\mathcal{E}$ è un elemento di $\mathcal{G}(\mu)$ e il suo integrale astratto di gauge coincide col suo integrale di Lebesgue.
Per la linearità dell'integrale astratto di gauge, segue che i due integrali coincidono su ogni funzione semplice
Per il teorema della convergenza monotona di entrambi gli integrali, segue che coincidono su ogni funzione non negativa misurabile, giacché ogni funzione non negativa misurabile ha una successione monotona di funzioni semplici non negative che gli converge puntualmente.
Dunque, spezzando f nella sua parte positiva f^+ e negativa f^-, che sono Lebesgue integrabili, otteniamo, sfruttando la linearità, che:

$$\int f d\bar{\mu} = \int f^+ d\bar{\mu} - \int f^- d\bar{\mu} = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu = \int (f^+ - f^-) d\mu = \int f d\mu,$$

ossia la tesi.

□

Bibliografia

[AP86] S.I. Ahmed and W.F. Pfeffer. *A Riemann integral in a locally compact Hausdorff space.* Journal of the Australian mathematical society (series A), vol.41, 1986.

[Gor94] R.A. Gordon. *The integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*. American mathematical society, graduate studies in mathematics, vol.4, 1994.

[KF75] A.N. Kolmogorov and S.V. Fomin. *Introductory real analysis*. Dover publication, 1975.

[Pfe94] W.F. Pfeffer. *The Riemann approach to integration*. Cambridge university press, 1994.

[Rie86] B. Riečan. *On the Kurzweil integral in compact topological spaces*. Radovi mat., vol.2, 1986.

[Rud06] W. Rudin. *Real and complex analysis.* Tata McGraw-Hill, 2006.

[Swa01] C. Swartz. *Introduction to gauge integrals.* World Scientific, 2001.