STIMA PUNTUALE DEL GRADIENTE PER SOLUZIONI DI EQUAZIONI ELLITTICHE SINGOLARI O DEGENERI IN DOMINI PROPRI CON CURVATURA MEDIA NONNEGATIVA

Tesi di laurea in Matematica Applicata

Laureando: Diego Castellaneta

Relatore: Enrico Valdinoci

Correlatore: Alberto Farina

Indice

1 Introduzione

In questo elaborato diamo un'estensione della famosa stima del gradiente trovata da Luciano Modica nell'85 [Mod85] e di altri risultati, ottenuti in [CGS94, FV09], legati a questa disuguaglianza.

Modica dimostrò che:

Se $F \in C^2(\mathbb{R})$ è nonnegativa e $u \in C^3(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ è soluzione in tutto $\mathbb{R}^n$ di $\Delta u = f(u)$, dove $f = F'$, allora

$$|\nabla u(x)|^2 \leq 2F(u(x)), \tag{1}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.

1.1 Legame con la conservazione dell'energia

Quando $n = 1$, (1) si riduce al classico principio di conservazione dell'energia.

Infatti, se $n = 1$, l'equazione si riduce all'equazione differenziale ordinaria $\ddot{u}(t) = f(u(t))$, per $t \in \mathbb{R}$.

Osservando che

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{|\dot{u}|^2}{2}\Big) = \ddot{u}\dot{u} = f(u)\dot{u} = \frac{d}{dt}\big(F(u)\big),$$

si ottiene che

$$\frac{|\dot{u}(t)|^2}{2} - \frac{|\dot{u}(0)|^2}{2} = F(u(t)) - F(u(0)). \tag{2}$$

Da cui, chiamando

$$\kappa_u := F(u(0)) - \frac{|\dot{u}(0)|^2}{2},$$

otteniamo che, per ogni $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{|\dot{u}(t)|^2}{2} = F(u(t)) - \kappa_u. \tag{3}$$

Facciamo ora vedere che

$$\kappa_u \geq 0. \tag{4}$$

Supponiamo, per assurdo, che $\kappa_u < 0$. Allora, essendo F nonnegativa, (3) darebbe che

$$\frac{|\dot{u}(t)|^2}{2} \geq -\kappa_u = |\kappa_u| > 0,$$

cioé

$$|\dot{u}(t)| \geq \tilde{\kappa}_u,$$

con $\tilde{\kappa}_u := \sqrt{2|\kappa_u|} > 0$.

Questo significa che o $\dot{u}(t) \geq \tilde{\kappa}_u$ o $\dot{u}(t) \leq -\tilde{\kappa}_u$. Quindi o $u(t) \geq u(0) + \tilde{\kappa}_u t$, o $u(t) \leq u(0) - \tilde{\kappa}_u t$. In entrambi i casi, mandando $t \to +\infty$, si avrebbe che u non è limitata, contro le nostre ipotesi. Ciò dimostra (4).

Da (3) e (4), otteniamo che, per ogni $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{|\dot{u}(t)|^2}{2} \leq F(u(t)),$$

che è (1) quando $n = 1$.

Quindi, nel caso $n = 1$, (1) può essere dimostrata in maniera elementare.

Inoltre, (2) è semplicemente il principio per cui l'energia totale (cioè cinetica più potenziale) del sistema, che si scrive come

$$\frac{|\dot{u}(t)|^2}{2} - F(u(t)),$$

è costante in t.

In questo senso, la disuguaglianza di Modica (1) può essere vista come un analogo multidimensionale del classico principio di conservazione dell'energia.

1.2 Esempi di alcune classiche stime a priori

Quella di Modica è l'esempio di una stima *a priori*. Con questo termine indichiamo le stime valide per tutte le possibili soluzioni di una classe di problemi, anche se le ipotesi non garantiscono l'esistenza della soluzione (rimandiamo a [GT83]). In letteratura abbiamo altri esempi di stime a priori, come la disuguglianza di Calderón-Zygmund, la disuguaglianza di Schauder e la stima di Cauchy.

La disuguglianza di Calderón-Zygmund, (vedi pag. 235 di [GT83]), fornisce una stima $W^{2,p}$ di questo tipo:

Se $f \in L^p(B_1)$ con $1 < p < \infty$, e $u \in W^{2,p}_{loc}(B_1) \cap L^p(B_1)$ è soluzione debole dell'equazione $Lu = f$ in B_1, dove L è un operatore ellittico, allora

$$\|u\|_{W^{2,p}(B_{1/2})} \leq C(\|u\|_{L^p(B_1)} + \|f\|_{L^p(B_1)}), \tag{5}$$

dove C è una costante dipendente da parametri dell'equazione.

Un altro esempio di stima a priori è quella di Schauder (vedi pagg. 93-109 di [GT83]) che da una stima $C^{2,\alpha}$ di questo tipo:

Se $u \in C^2(B_1)$ e $f \in C^\alpha(\overline{B_1})$ soddisfano l'equazione $Lu = f$ in B_1, allora

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(B_{1/2})} \leq C(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{C^\alpha(B_1)}). \tag{6}$$

La cosiddetta stima di Cauchy (vedi pag. 22 di [GT83]) fornisce una stima a priori sul gradiente:

Se u è una funzione armonica in Ω, allora

$$|\nabla u(x)| \leq \frac{n}{R} \sup_{B_R(x)} |u|, \tag{7}$$

per ogni x per cui $B_R(x) \subset\subset \Omega$.

Osserviamo che se u è armonica e limitata su tutto $\mathbb{R}^n$, allora la (7) o la (1) implicano che u è costante (questo risultato è noto come Teorema di Liouville). Quindi, una delle (banali) conseguenze di (1) è anche una dimostrazione alternativa del Teorema di Liouville.

La differenza sostanziale tra (1) e le classiche stime di Calderón-Zygmund, Schauder e Cauchy consiste nel fatto che (5), (6) e (7) sono tutte stime che coinvolgono un dominio (su cui u verifica l'equazione), mentre la (1) fornisce una stima puntuale.

1.3 Monotonia dell'energia

Diverse sono le applicazioni di (1). La prima, data in [Mod89], consiste nella monoticità dell'energia relativa all'equazione di Allen-Cahn: usando (1) viene dimostrato in [Mod89] che:

Se $F \in C^2(\mathbb{R})$ è nonnegativa e u è una soluzione limitata di $\Delta u = F'(u)$ in $\mathbb{R}^n$, allora la funzione

$$E(r) := \frac{1}{r^{n-1}} \int_{B_r} \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + F(u)\, dx$$

è non decrescente in $r \in (0, +\infty)$.

La monotonia della funzione $E(r)$ mostrata in [Mod89] può essere interpretata alla luce della teoria delle superfici minime, in cui si hanno formule di monotonia per il funzionale area, legate alla teoria della regolarità (vedi Remark 5.10 di [Giu86]).

1.4 Legame con la congettura di De Giorgi

Ennio De Giorgi, in una sua famosa congettura [DG79], chiede se:

È vero che tutte le soluzioni di

$$\Delta u = u^3 - u \text{ in } \mathbb{R}^n, \tag{8}$$

con $|u| \leq 1$ e $\partial u/\partial x_n > 0$ sono unidimensinali (cioè dipendono da una sola variabile), almeno se $n \leq 8$?

Questa congettura è ancora in parte aperta nella sua generalità. Infatti, nonostante lo sforzo di matematici di primo livello, si sono risolti pienamente solo i casi per $n = 2, 3$ (vedi [BCN97, GG98, AC00, AAC01]). Per $n \geq 4$, i risultati più vicini alla soluzione della congettura, sono quelli di [Sa03], in cui si dimostra la congettura sotto l'ipotesi ulteriore

$$\lim_{x_n \to \pm\infty} u(x', x_n) = \pm 1 \tag{9}$$

per ogni $x' \in \mathbf{R}^{n-1}$.

Non è noto se la congettura sia vera in dimensione $4 \leq n \leq 8$ senza l'ipotesi supplementare (9).

Tuttavia, come mostrato in [FV], l'ipotesi aggiuntiva (9) può essere indebolita. Infatti, considerati i seguenti limiti

$$\lim_{x_n \to +\infty} u(x', x_n) = \overline{u}(x')$$

$$\text{e} \lim_{x_n \to -\infty} u(x', x_n) = \underline{u}(x'),$$

si ha che la congettura è vera se le funzioni $\overline{u}$ e $\underline{u}$ sono bidimensionali (cioè dipendono da due variabili: si osservi che nell'ipotesi (9) $\overline{u}$ e $\underline{u}$ sono costanti e quindi, a maggior ragione, bidimensionali).

Notiamo che la "dimensione critica" che De Giorgi pone per la sua congettura è $n = 8$, forse per il legame con il problema di Bernstein per superfici di area minima, secondo il quale ogni grafico di area minimale di una funzione definita su $\mathbf{R}^m = \mathbf{R}^{n-1}$ è un iperpiano se $m \leq 7$ ovvero $n \leq 8$.

Per $n \geq 9$ esiste un recente controesempio che prova la non estendibilità della congettura di De Giorgi per queste diminsioni: si veda [DPKW08].

Ricordiamo che l'equazione (8) è legata a funzionali di energia usati in fisica per la teoria dei superconduttori e dei superfluidi (vedi [GP58, La67]), allo studio dell'influenza tra gas e solidi (vedi [Ro79, AC79]), a problemi di fluidodinamica (si veda [La67, AC81]) e di cosmologia (si veda [CaG95]).

Tornando alla disuguaglianza di Modica (1), in [CGS94] si dimostra che:

Se vale l'uguaglianza in (1), in un punto p non singolare, allora la soluzione u è unidimensionale.

A questo punto, nel caso particolare di $f(u) = u^3 - u$, abbiamo che la simmetria unidimensionale cercata dalla congettura di De Giorgi sussiste purchè esista un punto non critico che soddisfi l'uguaglianza in (1).

In questo elaborato, estenderemo anche questi tipi di risultati di simmetria al caso di funzionali più generali del Laplaciano (rimandiamo al paragrafo 1.6 e al Capitolo 2).

1.5 Estensioni del lavoro di Modica

La stima (1) fu ottenuta in [Mod85] per funzioni u che soddisfano la classica *equazione di Poisson* in tutto $\mathbb{R}^n$.

In [CGS94], si ottiene una stima analoga a (1) per operatori singolari e degeneri in tutto $\mathbb{R}^n$.

L'equazione differenziale considerata in [CGS94] è in forma di divergenza ed è del tipo

$$\mathrm{div}(\Phi'(|\nabla u|^2)\nabla u) - F'(u) = 0. \tag{10}$$

Si osservi che il caso particolare in cui $\Phi(s) = s$ riduce (10) all'*equazione di Poisson* $\Delta u = F'(u)$, che è quella studiata in [Mod85].

In [CGS94] si ottiene una stima puntuale sul gradiente analoga a (1), del tipo:
$$2\Phi'(|\nabla u(x)|^2)|\nabla u(x)|^2 - \Phi(|\nabla u(x)|^2) \leq 2F(u(x)).$$

Lo studio degli operatori singolari e degeneri trova terreno fertile per numerosi sviluppi. Ricordiamo, ad esempio, che alcuni problemi, come lo studio di sistemi di molle non perfettamente elastiche (punti critici per i modelli generalizzati di Frenkel-Kontorova, si veda [LV07]) e delle barre elastiche in tensione (si veda [Ant73]), usano equazioni degeneri e singolari.

Notiamo che, per tali operatori degeneri e singolari, la teoria della regolarità è più debole di quella degli operatori ellittici; infatti la soluzione u è, in generale, soltanto $C^{1,\alpha}$, e il valore ottimale di α non è ancora noto (rimandiamo a [DB83, Tol83, Tol84, Lie86, DB91]).

Inoltre le soluzioni di equazioni degeneri possono esibire fenomeni tipo plateau (cioè, ad esempio, essere costanti su un insieme aperto, senza essere costanti ovunque) e il *Principio del massimo* e di *confronto* diventano problematici (rimandiamo a [PS07]).

Una recente estensione al lavoro di Modica, è dovuta a Farina e Valdinoci [FV09]. Nel loro lavoro, viene studiato il problema per l'operatore Δ su domini propri (cioè non vuoti e non uguali a tutto $\mathbb{R}^n$). Più precisamente, [FV09] considerano il caso di un dominio (cioè un aperto connesso di $\mathbb{R}^n$) Ω, con $\Omega \neq \emptyset$ e $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ e studiano il problema
$$\begin{cases} \Delta u + F'(u) = 0 & \text{in } \Omega \\ u \geq 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

La stima puntuale ottenuta in [FV09], analoga a (1), è
$$\frac{1}{2}|\nabla u(x)|^2 \leq c_u - F(u(x)), \text{ per ogni } x \in \Omega, \tag{11}$$
dove
$$c_u := \sup_{r\in[0,\|u\|_{L^\infty(\Omega)}]} F(r).$$
Notiamo che (11) è più generale di (1) in quanto la F può cambiare segno (questo motiva l'introduzione di c_u).

In questo testo, estendiamo entrambi i lavori [CGS94] e [FV09], facendo fronte a entrambe le difficoltà aggiuntive al caso di [Mod85]. Considereremo cioè *operatori singolari degeneri*, come in [CGS94], ma *in domini propri*, come in [FV09].

Più precisamente, data una funzione $F \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R})$, studiamo le soluzioni limitate del problema

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\Phi'(|\nabla u|^2)\nabla u) + F'(u) = 0 & \text{in } \Omega \\ u \geq 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \tag{12}$$

Come di consueto, se $u \in C^1(\overline{\Omega})$ intenderemo che u è soluzione di (12) se risolve l'equazione in senso debole, cioè se

$$\int_\Omega \Big(\Phi'(|\nabla u|^2)\nabla u \cdot \nabla\psi - F'(u)\psi\Big) = 0,$$

per ogni $\psi \in C_0^1(\Omega)$.

Supponiamo che Ω sia un dominio con bordo non vuoto e con regolarità $C^{2,\alpha}_{loc}$. Notiamo che $\partial\Omega$ è sufficientemente liscio da definire la sua normale e la sua curvatura media (questa osservazione sarà importante per la successiva condizione (18)).

Come in [CGS94], presenteremo due insiemi di assunzioni che ci daranno una serie di ipotesi sulla funzione Φ, garantendo una certa ellitticità, seppur degenere o singolare:

Assunzione (A). Esistono $p > 1$ e $a \geq 0$, e delle costanti c_1, $c_2 > 0$ tali che $\Phi \in C^{3,\alpha}(\mathbb{R}^+)$ e per ogni σ, $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$c_1(a + |\sigma|)^{p-2} \leq \Phi'(|\sigma|^2) \leq c_2(a + |\sigma|)^{p-2}; \tag{13}$$

$$c_1(a + |\sigma|)^{p-2}|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{i\,j}(\sigma)\xi_i\xi_j \leq c_2(a + |\sigma|)^{p-2}|\xi|^2. \tag{14}$$

In (14) abbiamo usato la notazione

$$a_{i\,j}(\sigma) := 2\Phi''(|\sigma|^2)\sigma_i\sigma_j + \Phi'(|\sigma|^2)\delta_{ij}. \tag{15}$$

Un esempio di funzionale che verifica questa assunzione è il *p-Laplaciano*:

$$\operatorname{div}\Big((a + |\nabla u|^2)^{\frac{p-2}{2}}\nabla u\Big) = F'(u), \quad a \geq 0.$$

Assunzione (B). Esistono c_1, $c_2 > 0$ tali che $\Phi \in C^{3,\alpha}(\mathbb{R}^+)$ e per ogni $\sigma \in \mathbb{R}^n$

$$c_1(1 + |\sigma|)^{-1} \leq \Phi'(|\sigma|^2) \leq c_2(1 + |\sigma|)^{-1}, \tag{16}$$

$$c_1(1 + |\sigma|)^{-1}|\xi'|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{i\,j}(\sigma)\xi_i\xi_j \leq c_2(1 + |\sigma|)^{-1}|\xi'|^2, \tag{17}$$

dove $\xi' = (\xi, \xi_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ è ortogonale al vettore $(-\sigma, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Osserviamo come quest'ultima assunzione si adatti all'operatore di *superfici minime*

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = F'(u).$$

Considereremo inoltre la funzione Φ normalizzata tale da avere $\Phi(0) = 0$.

1.6 Risultati ottenuti

I teoremi da noi dimostrati estendono alcuni risultati di [FV09] al caso di operatori degeneri e singolari.

Il primo risultato ottenuto è una stima puntuale sul gradiente: come in [FV09], considereremo i casi in cui $\Omega = \Omega_0 \times \mathbb{R}^{n-k}$, con Ω_0 limitato, e in cui Ω è un epigrafico:

Teorema 1.1 *(I). Sia $\Omega = \Omega_0 \times \mathbb{R}^{n-k}$, dove $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^k$ è un dominio limitato. Supponiamo che*

$$\textit{la cuvatura media di } \partial\Omega \textit{ sia nonnegativa.} \tag{18}$$

Sia $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap L^\infty(\Omega)$ una soluzione in senso debole di (12), con $|\nabla u| \in L^\infty(\Omega)$.

Sia

$$c_u := \sup_{r \in [0, \|u\|_{L^\infty(\Omega)}]} F(r). \tag{19}$$

Allora

$$2\Phi'(|\nabla u(x)|^2)|\nabla u(x)|^2 - \Phi(|\nabla u(x)|^2) \leq 2(c_u - F(u(x))), \quad \text{per ogni } x \in \Omega. \tag{20}$$

(II). Supponiamo che Ω sia un epigrafico, cioè che esista una $\Psi : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ tale che

$$\Omega = \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \text{ tale che } x_n > \Psi(x')\}.$$

Assumiamo $\Psi \in C^{2,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^{n-1})$, con

$$\|\nabla\Psi\|_{C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^{n-1})} < +\infty. \tag{21}$$

Supponiamo inoltre che (18) *sia verificata.*

Sia $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap L^\infty(\Omega)$ una soluzione in senso debole di (12).

Allora vale la formula (20).

Nei casi in cui (20) è verificata, sotto opportune ipotesi di regolarità sui punti critici di F, è possibile anche determinare il valore di c_u in (19). Questo è il secondo risultato che presentiamo.

Teorema 1.2 *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio e sia $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap L^\infty(\Omega)$, con $|\nabla u| \in L^\infty(\Omega)$, una soluzione debole di (12) per la quale (20) è vera.*

Nel caso $p > 2$, assumiamo anche che se $x_0 \in \overline{\Omega}$ verifica $F'(u(x_0)) = 0$, allora

$$|F'(u(x)) - F'(u(x_0))| \leq C|u(x) - u(x_0)|^{p-1} \tag{22}$$

per ogni $x \in \overline{\Omega}$, dove p è lo stesso della (13) e C una costante positiva.

Allora,

$$c_u = \max\left\{F(0), F\left(\|u\|_{L^\infty(\Omega)}\right)\right\} \tag{23}$$

e

$$c_u > F(t) \text{ per ogni } t \in \left(0, \|u\|_{L^\infty(\Omega)}\right).$$

Inoltre, se

$$F'(0) \geq 0, \tag{24}$$

allora

$$c_u = F\left(\|u\|_{L^\infty(\Omega)}\right) \tag{25}$$

e

$$c_u > F(t) \text{ per ogni } t \in \left[0, \|u\|_{L^\infty(\Omega)}\right) \tag{26}$$

$$\text{a meno che } u \text{ sia identicamente } 0.$$

Il terzo teorema da noi ottenuto è un risultato di rigidità: se vale l'uguaglianza in (20) per un punto non degenere, allora u è unidimensionale. Più in dettaglio:

Teorema 1.3 *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio e sia $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap L^\infty(\Omega)$, con $|\nabla u| \in L^\infty(\Omega)$, soluzione di (12) per la quale (20) è vera.*

Supponiamo che valga la (22) e che

$$\textit{l'uguaglianza in } (20) \textit{ valga per un punto } p \in \Omega \cap \{\nabla u \neq 0\} \tag{27}$$

e sia C la componente conessa di Ω contenente p.

Allora, l'uguaglianza in (20) vale per ogni punto in C, ed esiste $\omega \in S^{n-1}$ e $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $u(x) = u_0(\omega \cdot x)$ per ogni $x \in C$.

Inoltre, se

$$\begin{aligned} &\textit{vale l'Assunzione (B) o} \\ &\textit{vale l'Assunzione (A), con } p = 2 \textit{ o } a > 0, \end{aligned} \tag{28}$$

allora $u(x) = u_0(\omega \cdot x)$ per ogni $x \in \Omega$.

Infine, ci occupiamo del problema inverso di determinare il dominio Ω a partire dalla soluzione u, ottenendo il seguente risultato:

Teorema 1.4 *Assumiamo che la (22) e la (28) siano verificate.*

Sia $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap L^\infty(\Omega)$, con $|\nabla u| \in L^\infty(\Omega)$, soluzione di (12), per cui la (20) è vera. Supponiamo che valga l'uguaglianza in (20) per almeno un punto $p \in \Omega \cap \{\nabla u \neq 0\}$.

Allora Ω è un semispazio oppure una striscia.

1.7 Il ruolo della curvatura del dominio

Vogliamo sottolineare che l'ipotesi di curvatura del dominio (18) non può essere rimossa, come mostrato dal seguente esempio.

Sia $\Omega = \mathbb{R}^n \backslash B_1$ e sia

$$u(x) := 1 - \frac{1}{|x|^{n-2}},$$

per $n \geq 3$.

Sia anche $F := 0$.

Allora,

$$\begin{cases} \Delta u + F'(u) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \backslash B_1 \\ u > 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \backslash B_1, \\ u = 0 & \text{su } \partial B_1. \end{cases}$$

Tuttavia, se u verificasse (1), si avrebbe che

$$|\nabla u|^2 \leq 0,$$

che implica u identicamente nulla.

Questo assurdo mostra che (1) può non valere su domini propri se la loro curvatura è negativa.

1.8 Alcune idee sulle dimostrazioni

Per le nostre dimostrazioni, è utile definire la seguente *P-funzione*:

$$P(u,x) = 2\Phi'(|\nabla u(x)|^2)|\nabla u(x)|^2 - \Phi(|\nabla u(x)|^2) - 2F(u(x)). \tag{29}$$

L'idea generale della P-funzione (vedi [Pay76, Spe81]) è che P sia soluzione di un'equazione ellittica (almeno in punti non singolari) e che si possa dimostrare, via principi di confronto, che P sia non positiva: si noti infatti che questa stima sul segno di P implica la disuguaglianza puntuale sul gradiente in (20).

Più precisamente, si ha il seguente risultato (la cui dimostrazione, adattata da [CGS94] è molto calcolosa):

Lemma 1.1 *Sia $u \in C^3(\Omega)$ soluzione di (12) dove $\Phi \in C^3(\mathbb{R}^+)$ e $F \in C^2(\mathbb{R})$. Sia P come in* (29).

Allora

$$\sum_j |\nabla u|^2 \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_i d_{ij}(\nabla u)\frac{\partial P}{\partial x_i}\right) + \sum_i B_i \frac{\partial P}{\partial x_i} \geq \frac{|\nabla P|^2}{2\Lambda(|\nabla u|^2)} \text{ in } \Omega, \tag{30}$$

dove

$$d_{ij}(\sigma) := a_{ij}/\Lambda(|\sigma|^2), \tag{31}$$

$$B_i := B_i(u,\nabla u) = -2\frac{f(u)}{\Lambda(|\nabla u|^2)}\frac{\partial u}{\partial x_i}\left(1 + \frac{\Phi''(|\nabla u|^2)|\nabla u|^2}{\Phi'(|\nabla u|^2)}\right) \tag{32}$$

e

$$\Lambda(s) := 2s\Phi''(s) + \Phi'(s). \tag{33}$$

Per ottenere il Teorema 1.1, si usa quindi il Lemma 1.1 al fine di dimostrare che

$$\begin{aligned} &P \leq 0 \text{ per ogni funzione } u \\ &\text{appartenente a una “buona famiglia” di soluzioni.} \end{aligned} \tag{34}$$

La dimostrazione di (34) procede per assurdo, assumendo che l'estremo superiore della P-funzione, fatto sulle x del dominio e sulle u della famiglia, sia negativo. Si considerano quindi x_k e u_k che tendono a raggiungere tale estremo superiore. Per la compattezza data dalla teoria della regolarità ellittica e singolare (vedi [DB83, Tol83, Tol84, Lie86, DB91]) la u_k converge a meno di sottosuccessioni. Quando x_k rimane all'interno del dominio, si ottiene una contraddizione con argomenti simili a [Mod85, CGS94] (moralmente, “per punti interni al dominio si torna al caso dell'equazione su tutto $\mathbb{R}^n$”). Per punti x_k che convergono al bordo, si usa il *pricipio di Hopf* (rimandiamo a [PS07]) e si calcola il segno della derivata normale di P: l'assurdo viene ottenuto in questo caso dall'assunzione sul segno della curvatura del dominio in (18).

Per dimostrare il Teorema 1.2 si prova, grazie ad una disuguaglianza differenziale, che nei punti critici in cui la F raggiunge il massimo, la funzione u è costante. La tesi seguirà poi per assurdo.

La tecnica dimostrativa adottata per il Teorema 1.3, è la seguente: si parte col provare che l'uguaglianza in (20) vale su una componente connessa aperta C di $\Omega \cap \{\nabla u \neq 0\}$. Per questo, usiamo il *Principio del massimo forte* sulla funzione P. Successivamente si mostra che gli insiemi di livello di u in C sono una famiglia di *ipersuperfici isoparametriche*, cioè

$$\begin{aligned} \Delta u &= f(u) \\ |\nabla u| &= g(u), \end{aligned}$$

con $g \in C^1(0, \|u\|_{L^\infty(\Omega)})$.

Tali ipersuperfici isoparametriche sono state completamente classificate: esse debbono necessariamente avere simmetria sferica, planare o cilindrica.

I casi sferici e cilindrici vengono eliminati da un'analisi geometrica, resta quindi il solo caso di simmetria planare.

In effetti, questa simmetria è dimostrata in questo modo sulla sola componente connessa aperta C: ma il *Principio della continuazione unica* ci permette di estendere tale simmetria su tutto Ω.

Infine, lo studio della geometria degli zeri di una funzione unidimensionale ci permette di dedurre il Teorema 1.4 dal Teorema 1.3.

2 Stima puntuale del gradiente per soluzioni di equazioni ellittiche singolari o degeneri in domini propri con curvatura media nonnegativa

Diamo ora le dimostrazioni dei risultati proposti (rimandiamo al paragrafo 1.6).

2.1 Dimostrazione del Lemma 1.1

Dimostrazione: Notiamo subito che da (14) segue che $\Lambda(s) > 0$ per $s > 0$. Derivando la funzione P si ottiene che

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} = 2\Lambda(|\nabla u|^2) \sum_k \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_k} - 2f(u) \frac{\partial u}{\partial x_i}. \tag{35}$$

Da ciò segue che

$$\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_i d_{ij}(\nabla u) \frac{\partial P}{\partial x_i} \right) = -2 \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(f(u) \sum_i d_{ij}(\nabla u) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) +$$

$$+2 \sum_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_i a_{ij}(|\nabla u|) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \right) \frac{\partial u}{\partial x_k} + \tag{36}$$

$$+2 \sum_{ij} a_{ij}(|\nabla u|) \sum_k \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}.$$

Inoltre, ricordando la definizione in (15) si vede che

$$\sum_{ij} a_{ij}(\nabla u) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} = F'(u) = f(u) \tag{37}$$

e quindi si ha che

$$\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{ik} a_{ij}(|\nabla u|) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \right) = \sum_k f'(u) \frac{\partial u}{\partial x_k}. \tag{38}$$

A questo punto riscriviamo la (36) usando la (38) ottenedo

$$\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_i d_{ij}(\nabla u) \frac{\partial P}{\partial x_i} \right) =$$

$$= 2f'(u) \sum_k \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_k} + 2 \sum_{ij} a_{ij}(|\nabla u|) \sum_k \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} - \tag{39}$$

$$-2 \sum_{ij} f'(u) d_{ij}(\nabla u) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} - 2f(u) \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_i d_{ij}(\nabla u) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right).$$

A questo punto, dalla definzione delle funzioni $\Lambda(s)$ e $d_{ij}(\sigma)$, si osserva che vale la seguente uguaglianza:

$$f'(u)\sum_k \frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial u}{\partial x_k} - \sum_{ij} f'(u)d_{ij}(\nabla u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} =$$

$$= f'(u)\left[|\nabla u|^2 - \frac{\Phi'(|\nabla u|^2)|\nabla u|^2 + 2\Phi''(|\nabla u|^2)|\nabla u|^4}{\Lambda(|\nabla u|^2)}\right] =$$

$$= f'(u)\left[|\nabla u|^2 - |\nabla u|^2\right] = 0.$$

Quindi, sostituendo questa equazione in (38), si ottiene che

$$\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_i d_{ij}(\nabla u)\frac{\partial P}{\partial x_i}\right) =$$

$$= 2\sum_{ij} a_{ij}(|\nabla u|)\sum_k \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} - 2f(u)\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_i d_{ij}(\nabla u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right). \quad (40)$$

Inoltre, dalla definizione di d_{ij} e da (38), segue che

$$\sum_{ij} d_{ij}(\nabla u)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{f(u)}{\Lambda(|\nabla u|^2)} \text{ in } \Omega,$$

quindi (40) diventa

$$\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_i d_{ij}(\nabla u)\frac{\partial P}{\partial x_i}\right) =$$

$$= 2\sum_{ij} a_{ij}(|\nabla u|)\sum_k \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} - \quad (41)$$

$$-2f(u)\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\sum_i d_{ij}(\nabla u)\frac{\partial u}{\partial x_i} - 2\frac{f^2(u)}{\Lambda(|\nabla u|^2)}.$$

Inoltre, usando la (15), la (31) e la (33), possiamo scrivere:

$$\sum_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} d_{ij}(\nabla u)\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{2\Phi''(|\nabla u|^2)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} + \Phi'(|\nabla u|^2)\delta_{ij}}{2|\nabla u|^2\Phi''(|\nabla u|^2) + \Phi'(|\nabla u|^2)}. \quad (42)$$

Calcolando quindi la derivata del rapporto di funzioni che troviamo sopra, si ottiene (omettiamo, per facilitare la lettura, l'argomento di Φ e delle sue derivate che è $|\nabla u|^2$):

$$\sum_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\left[4\Phi''' \sum_k \frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} + 2\Phi''\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} + 2\Phi''\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}\right.}{\left(2|\nabla u|^2\Phi'' + \Phi'\right)^2} +$$

$$+\frac{2\Phi''\sum_k \frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}\delta_{ij}\Big](2|\nabla u|^2\Phi''+\Phi')}{\left(2|\nabla u|^2\Phi''+\Phi'\right)^2}-$$

$$-\sum_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{(2\Phi''\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}+\Phi'\delta_{ij})\Big[4\Phi''\sum_k \frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}+}{\left(2|\nabla u|^2\Phi''+\Phi'\right)^2}$$

$$\frac{+4|\nabla u|^2\Phi'''\sum_k \frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\partial x_k}+2\Phi''\sum_k \frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}\Big]}{\left(2|\nabla u|^2\Phi''+\Phi'\right)^2}. \tag{43}$$

Ora, basta semplicemente svolgere i prodotti per ottenere

$$\sum_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}d_{ij}(\nabla u)\frac{\partial u}{\partial x_i}=\frac{(2|\nabla u|^2\Phi''+\Phi')|\nabla u|^2\Delta u}{(2|\nabla u|^2\Phi''+\Phi')^2}-$$

$$-\sum_{ij}\frac{(2|\nabla u|^2\Phi''+\Phi')\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}}{(2|\nabla u|^2\Phi''+\Phi')^2},$$

e cioè, da (33), abbiamo:

$$\sum_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}d_{ij}(\nabla u)\frac{\partial u}{\partial x_i}=2\frac{\Phi''(|\nabla u|^2)}{\Lambda(|\nabla u|^2)}\left(|\nabla u|^2\Delta u-\sum_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right). \tag{44}$$

Notiamo inoltre che da (15) e da (37) abbiamo che

$$f(u)=\sum_{ij}\left(2\Phi''(|\nabla u|^2)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}+\Phi'(|\nabla u|^2)\delta_{ij}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}=$$

$$=2\Phi''(|\nabla u|^2)\sum_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}+\Phi'(|\nabla u|^2)\Delta u,$$

da cui segue la seguente uguaglianza:

$$\Delta u=\frac{f(u)}{\Phi'(|\nabla u|^2)}-2\frac{\Phi''(|\nabla u|^2)}{\Phi'(|\nabla u|^2)}\sum_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}.$$

A questo punto possiamo riscrivere (44) nel seguente modo

$$\sum_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}d_{ij}(\nabla u)\frac{\partial u}{\partial x_j}=$$

$$=2\frac{\Phi''(|\nabla u|^2)}{\Phi'(|\nabla u|^2)\Lambda(|\nabla u|^2)}\left[f(u)|\nabla u|^2-\Lambda(|\nabla u|^2)\sum_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right]=$$

$$= -\frac{\Phi''(|\nabla u|^2)}{\Phi'(|\nabla u|^2)\Lambda(|\nabla u|^2)} \sum_i \frac{\partial P}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i},$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo (35).

Quindi, ricordando (40), abbiamo che

$$\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_i d_{ij}(\nabla u) \frac{\partial P}{\partial x_i} \right) - 2f \frac{\Phi''(|\nabla u|^2)}{\Phi'(|\nabla u|^2)\Lambda(|\nabla u|^2)} \sum_i \frac{\partial P}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} =$$
$$= 2 \sum_{ijk} a_{ij}(\nabla u) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} - 2 \frac{f^2(u)}{\Lambda(|\nabla u|^2)}. \tag{45}$$

Ora, ricordando la disuguaglianza di Schwarz, poniamo

$$z_k = \sum_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Quindi

$$\sum_{ijk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_j} = \sum_k z_k^2,$$

perciò

$$|z_k| \leq \left(\sum_i \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_i \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

e di conseguenza

$$z_k^2 \leq \sum_i \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \right)^2 |\nabla u|^2.$$

Questo prova la seguente disuguaglianza :

$$|\nabla u|^2 \sum_{ik} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \right)^2 \geq \sum_{ij\,k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_j}. \tag{46}$$

A questo punto, da (15), segue

$$\sum_{ij\,k} a_{ij}(\nabla u) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} =$$
$$= \sum_{ijk} \Phi' \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + 2 \sum_{ijk} \Phi'' \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_j}. \tag{47}$$

Grazie alla (46), deduciamo da (47) che

$$\sum_{ij\,k} a_{ij}(\nabla u) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} \geq$$

$$\geq \sum_{ik} \frac{\Phi'}{|\nabla u|^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_i} \sum_{jk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_j} +$$

$$+2\Phi'' \sum_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_i} \sum_{jk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_j} =$$

$$= \frac{\Lambda}{|\nabla u|^2} \sum_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_i} \sum_{jk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_j}.$$

D'ora in poi sott'intendiamo che l'argomento di Φ, Φ' e Φ'' è $|\nabla u|^2$.

Inoltre, osserviamo che da (35):

$$\sum_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_i} \sum_{j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_j} = \sum_k \left(\frac{\partial P}{\partial x_k} + 2f \frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 \frac{1}{4\Lambda^2}.$$

Questa identità implica che:

$$\sum_{ijk} a_{ij}(\nabla u) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} \geq \frac{1}{4|\nabla u|^2 \Lambda} \sum_k \left(\frac{\partial P}{\partial x_k} + 2f \frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2.$$

Ora sostituiamo in (45) e otteniamo:

$$\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_i d_{ij}(\nabla u) \frac{\partial P}{\partial x_i} \right) - 2 \frac{\Phi'' f}{\Lambda \Phi'} \sum_i \frac{\partial P}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \geq$$

$$\geq \frac{1}{2|\nabla u|^2 \Lambda} \sum_k \left(\frac{\partial P}{\partial x_k} + 2f \frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 - 2 \frac{f^2}{\Lambda}.$$

Otteniamo allora:

$$
\begin{aligned}
& |\nabla u|^2 \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_i d_{ij}(\nabla u)\frac{\partial P}{\partial x_i}\right) - 2\frac{f}{\Lambda}\sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\left(1+\frac{\Phi''|\nabla u|^2}{\Phi'}\right)\frac{\partial P}{\partial x_i} = \\
= \; & |\nabla u|^2 \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_i d_{ij}(\nabla u)\frac{\partial P}{\partial x_i}\right) - 2\frac{f}{\Lambda}\sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial P}{\partial x_i} - \\
& -2\frac{f}{\Lambda}\frac{\Phi''}{\Phi'}|\nabla u|^2 \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial P}{\partial x_i} \geq \\
\geq \; & \frac{|\nabla u|^2}{2|\nabla u|^2\Lambda}\left[\sum_k \left(\frac{\partial P}{\partial x_k} + 2f\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2\right] - \\
& -2|\nabla u|^2\frac{f^2}{\Lambda} - 2\frac{f}{\Lambda}\sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial P}{\partial x_i} = \\
= \; & \frac{1}{2\Lambda}\left[\sum_k \left(\frac{\partial P}{\partial x_k}\right)^2 + 4f\sum_k \frac{\partial P}{\partial x_k}\frac{\partial u}{\partial x_k} + 4f^2\sum_k (\frac{\partial u}{\partial x_k})^2\right] - \\
& -2|\nabla u|^2\frac{f^2}{\Lambda} - 2\frac{f}{\Lambda}\sum_i \frac{\partial P}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i} = \\
= \; & \frac{|\nabla P|^2}{2\Lambda} + 2\frac{f}{\Lambda}\sum_k \frac{\partial P}{\partial x_k}\frac{\partial u}{\partial x_k} + 2|\nabla u|^2\frac{f^2}{\Lambda} - \\
& -2|\nabla u|^2\frac{f^2}{\Lambda} - 2\frac{f}{\Lambda}\sum_i \frac{\partial P}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i} = \\
= \; & \frac{|\nabla P|^2}{2\Lambda},
\end{aligned}
$$

e questo dimostra (30). □

2.2 Dimostrazione del Teorema 1.1

A questo punto arriviamo a dimostrare il primo risultato. Cerchiamo di estendere il lavoro di [FV09], provando che vale per funzionali più generali. Proveremo che la tesi è vera sia per i domini limitati che per gli epigrafici. Per farlo, per prima cosa useremo la formulazione debole del risultato del Lemma 1.1, successivamente si procede a dimostrare che l'estremo superiore, di un'opportuna P-funzione, è negativo.

Dimostrazione: Il metodo che seguirà è ispirato ai lavori fatti in [Mod85, CGS94, FV09]. Ora dimostremo il caso (II), cioè il caso in cui Ω è un epigrafico. Il caso (I) seguirà facilmente con piccole modifiche che discuteremo alla fine della dimostrazione. Sia

$$G(t) = c_u - F(t).$$

Notiamo che

$$G(t) \geq 0 \tag{48}$$

per ogni $t \in [0, \|u\|_{L^\infty(\Omega)}]$. Per ogni $v \in C^1$ nel suo dominio, e C^3 in $\{|\nabla u| \neq 0\}$, e per ogni x nel dominio di v, definiamo la funzione $P(v, x)$ come in (29), con G al posto di F.

Dal Lemma 1.1 precedentemente dimostrato, sappiamo che

$$\sum_j |\nabla v|^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_i d_{ij}(\nabla v) \frac{\partial P}{\partial x_i} \right) + \sum_i B_i \frac{\partial P}{\partial x_i} \geq \frac{|\nabla P|^2}{2\Lambda(|\nabla v|^2)}$$

debolmente in $\{\nabla v \neq 0\}$.

Allora, posto $a(x) = |\nabla v(x)|^2$ e D forma bilineare derivante da d_{ij}, per ogni $\overline{\varphi} \in C_0^1(\{\nabla v \neq 0\}, [0, \infty))$ la sua formulazione debole sarà

$$-\int_\Omega \langle D(|\nabla v|^2)\nabla P, \nabla(a\overline{\varphi})\rangle - 2\int_\Omega \frac{G'(v)\overline{\varphi}\nabla v \cdot \nabla P}{\Lambda(|\nabla v|^2)} -$$

$$-2\int_\Omega \frac{G'(v)\overline{\varphi}\nabla v \cdot \nabla P \Phi''(|\nabla v|^2)|\nabla v|^2}{\Lambda(|\nabla v|^2)\Phi'(|\nabla v|^2)} dx \geq \int_\Omega \frac{|\nabla P|^2 \overline{\varphi}}{2\Lambda(|\nabla v|^2)} dx. \tag{49}$$

Per ogni $\varphi \in C_0^1(\nabla v \neq 0, [0, \infty))$, prendendo $\overline{\varphi} = \varphi/a$ e sostituendo sopra, abbiamo che

$$-\int_\Omega \langle D(|\nabla v|^2)\nabla P, \nabla(\varphi)\rangle dx - 2\int_\Omega \frac{G'(v)\varphi\nabla v \cdot \nabla P}{\Lambda(|\nabla v|^2)|\nabla v|^2} dx -$$

$$-2\int_\Omega \frac{G'(v)\varphi\nabla v \cdot \nabla P \Phi''(|\nabla v|^2)|}{\Lambda(|\nabla v|^2)\Phi'(|\nabla v|^2)} dx \geq \int_\Omega \frac{|\nabla P|^2 \varphi}{2\Lambda(|\nabla v|^2)|\nabla v|^2} dx. \tag{50}$$

Da cui,

$$\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (d_j(\nabla v)\nabla P) + \frac{B \cdot \nabla P}{|\nabla v|^2} \geq \frac{|\nabla P|^2}{2\Lambda(|\nabla v|^2)|\nabla v|^2} \geq 0 \tag{51}$$

debolmente in $\{\nabla v \neq 0\}$.

Ora, ricordando (21), denotiamo con $\mathcal{G}$ l'insieme di tutte le funzioni $\psi \in C^2(\mathbb{R}^{n-1})$ tali che la superficie $\{x_n = \psi(x')\}$ ha curvatura media nonnegativa e

$$\|\nabla\psi\|_{C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq \|\nabla\Psi\|_{C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^{n-1})}. \tag{52}$$

Per ogni $\psi \in \mathcal{G}$, definiamo il suo epigrafico

$$\Omega_\psi = \{x_n > \psi(x')\}.$$

Notiamo che, per costruzione, se $\psi \in \mathcal{G}$ abbiamo che

$$\text{la curvatura media di } \partial\Omega_\psi \text{ è nonnegativa.} \tag{53}$$

Definiamo

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = \{v \in C^1(\overline{\Omega_\psi}) \text{ soluzione debole di } \operatorname{div}(\Phi'(|\nabla v|^2)\nabla v) = G'(v) \\ \text{in } \Omega_\psi \text{ con } 0 \leq v \leq \|u\|_{L^\infty(\Omega)},\ \|\nabla v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}, \\ v = 0 \text{ su } \partial\Omega_\psi \text{ e } \psi \in \mathcal{G}\}. \end{aligned} \tag{54}$$

Notiamo che se $v \in \mathcal{F}$ allora esiste una $\psi^{(v)} \in \mathcal{G}$ tale che v è C^3 in $\Omega_{\psi^{(v)}}$. Così, con un piccolo abuso di notazione, scriveremo

$$\Omega_v = \Omega_{\psi^{(v)}},$$

quindi Ω_v denoterà il dominio di ogni $v \in \mathcal{F}$.

Ora, consideriamo

$$P_0 = \sup_{v \in \mathcal{F},\, x \in \Omega_v} P(v, x). \tag{55}$$

Dalla regolarità ellittica (rimandiamo a [Lie86]), abbiamo che

$$\|v\|_{C^{1,\alpha}(\Omega_v)} \leq C, \tag{56}$$

per ogni $v \in \mathcal{F}$, dove $C > 0$ dipende solo da $\|u\|_{L^\infty(\Omega)}$ e $\|\Psi\|_{C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^{n-1})}$. Perciò, come ovvia conseguenza di (56) si ha che P_0 è finito. A questo punto, ricordando la (21), osserviamo che $u \in \mathcal{F}$, $\Omega_u = \Omega$, e allora la tesi è provata se mostriamo che

$$P_0 \leq 0. \tag{57}$$

Per provare questo, supponiamo per assurdo che

$$P_0 > 0 \tag{58}$$

e prendiamo $v_k \in \mathcal{F}$ e $x_k \in \Omega_{v_k}$ tale che

$$P_0 - \frac{1}{k} \leq P(v_k, x_k) \leq P_0. \tag{59}$$

Sia

$$u_k(x) = v_k(x + x_k).$$

Notiamo che $u_k \in \mathcal{G}$ e

$$0 \in \Omega_{u_k}, \tag{60}$$

perchè $x_k \in \Omega_{v_k}$. Si nota anche che $P(u_k, 0) = P(v_k, x_k)$, quindi

$$P_0 - \frac{1}{k} \leq P(u_k, 0) \leq P_0. \tag{61}$$

Da (56) e dal Lemma 6.37 di [GT83], sappiamo che possiamo prendere $\tilde{u}_k \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ un'estensione liscia di u_k, che sia $\tilde{u}_k = u_k$ su Ω_{u_k}, tale che

$$\|\tilde{u}_k\|_{C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^n)} \leq C. \tag{62}$$

Ora denotiamo con $\psi_k \in \mathcal{G}$ la funzione che descrive $\partial\Omega_{u_k}$. Sapendo che $0 \in \Omega_{u_k}$ possiamo dire che

$$\psi_k(0) \leq 0. \tag{63}$$

Questo prova che

$$\psi_k(0) \text{ è limitata.} \tag{64}$$

Per provarlo, supponiamo per assurdo che non sia vero. Allora, dalla (63), si potrebbe avere che $\psi_k(0) \to -\infty$, a meno di sottosuccessioni. Perciò, dalla (52), si potrebbe avere che $\psi_k(x') \to -\infty$ localmente uniformemente.

Inoltre, dalla (21), u_k convergerebbe, a meno di sottosuccessioni, in $C^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ a qualche $u_\infty \in C^1(\mathbb{R}^n)$ che risolve debolmente

$$\operatorname{div}(\Phi'(|\nabla u_\infty|^2)\nabla u_\infty) = G'(u_\infty) \text{ in } \mathbb{R}^n. \tag{65}$$

Prendendo il limite in (61), si avrebbe $P_0 = P(u_\infty, 0)$, e così, da (58), $P(u_\infty, 0) > 0$. Ma questa affermazione e la (65), portano all'assurdo grazie al Lemma 4.11 in [FSV08] o al Teorema 1.6 in [CGS94].

Così segue che $\psi_k(0)$ è limitato. Quest'ultimo risultato e (52) ci portano a dire che ψ_k converge in $C^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{n-1})$, a meno di sottosucessioni, ad una funzione $\psi_\infty \in \mathcal{G}$. A questo punto possiamo scrivere

$$\Omega_\infty = \{x_n > \psi_\infty(x')\}.$$

Quindi, richiamando (62), si ha che $\tilde{u}_k$ converge, sempre a meno di sottosuccessioni, in $C^{1,\alpha}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, a qualche u_∞, con

$$\|u_\infty\|_{C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^n)} \leq C. \tag{66}$$

Abbiamo che u_∞ è soluzione debole di

$$\operatorname{div}(\Phi'(|\nabla u_\infty|^2)\nabla u_\infty) = G'(u_\infty) \text{ in } \Omega_\infty. \tag{67}$$

Infatti, se $x = (x', x_n) \in \Omega_\infty$, allora $x' > \psi_\infty(x')$ per k grande, e questo da:

$$\operatorname{div}(\Phi'(|\nabla u_\infty|^2)\nabla u_\infty) =$$
$$= \lim_{k\to+\infty} \operatorname{div}(\Phi'(|\nabla u_k|^2)\nabla u_k) = \lim_{k\to+\infty} G'(u_k(x)) = G'(u_\infty(x))$$

in senso debole, che è esattamente la (67).

Inoltre, per ogni $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$,

$$|u_\infty(x', \psi_\infty(x'))| \leq |u_k(x', \psi_\infty(x')) - u_\infty(x', \psi_\infty(x'))| +$$
$$+ |u_k(x', \psi_\infty(x')) - u_k(x', \psi_k(x'))| + |u_k(x', \psi_k(x'))| \leq$$
$$\leq \sup_{B_1(x', \psi_\infty(x'))} |u_\infty - u_k| + C|\psi_\infty(x') - \psi_k(x')| + 0.$$

Perciò, mandando $k \to +\infty$, si ottiene che $u_\infty(x', \psi_\infty(x')) = 0$, che vuol dire

$$u_\infty \text{ si annulla su } \partial\Omega_\infty. \tag{68}$$

In particolare, $u_\infty \in \mathcal{F}$.

Passando a limite in (61) e ricordando che $P_0 > 0$, otteniamo:

$$2\Phi'(|\nabla u_\infty(0)|^2)|\nabla u_\infty(0)|^2 - \Phi(|\nabla u_\infty(0)|^2) - \tag{69}$$

$$-2G(\nabla u_\infty(0)) = P(u_\infty, 0) = P_0 > 0.$$

Ricordando anche (68) si osserva che

$$\partial_\nu u_\infty(x) \geq 0 \qquad \text{per ogni } x \in \Omega_\infty. \tag{70}$$

Indichiamo con ν la normale interna di $\partial\Omega_\infty$.

Affermiamo ora che

$$\inf_{\Omega_\infty} |\nabla u_\infty| = 0. \tag{71}$$

Per provarlo supponiamo per assurdo che

$$\inf_{\Omega_\infty} |\nabla u_\infty| \geq c \tag{72}$$

per qualche $c > 0$. Fissiamo Q dentro Ω e consideriamo la soluzione $\gamma \in C^1(\mathbb{R}, \Omega_\infty)$ dell'ODE

$$\begin{cases} \gamma' = \frac{\nabla u_\infty(\gamma(t))}{|\nabla u_\infty(\gamma(t))|} \\ \\ \gamma(0) = Q. \end{cases}$$

Notiamo che γ è globalmente definita per la (72) e non tocca $\partial\Omega_\infty$ sempre per (72). Di conseguenza, per ogni $t > 0$,

$$2\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \geq u_\infty(\gamma(t)) - u_\infty(\gamma(0)) =$$

$$= \int_0^t \nabla u_\infty(\gamma(s))\gamma'(s)ds = \int_0^t |\nabla u_\infty(\gamma(s))|ds \geq ct.$$

Per t grande segue l'assurdo, e possiamo concludere che (71) è verificata.

Ora affermiamo che

$$\text{se } P(u_\infty, y) = P_0 \text{ per qualche } y \in \Omega_\infty, \text{ allora } y \in \partial\Omega_\infty. \tag{73}$$

per dimostrarlo, procediamo ancora una volta per assurdo, e supponiamo che y stia in Ω_∞. Allora,

$$\text{l'insieme } U = \{x \in \Omega_\infty \text{ t.c. } P(u_\infty, x) = P_0\} \text{ è non vuoto.} \tag{74}$$

Perciò, per ogni $x \in U$,

$$0 < P_0 = P(u_\infty, x) =$$

$$= 2\Phi'(|\nabla u_\infty|^2)|\nabla u_\infty|^2 - \Phi(|\nabla u_\infty|^2) - 2G(u_\infty).$$

A questo punto, $\nabla u(x)$ dev'essere per forza diverso da zero, perchè se così non fosse, ricordando che $\Phi(0) = 0$, si ha:

$$P_0 = P(u_\infty, x) = -2G(u_\infty(x_0)) \leq 0,$$

perchè $G \geq 0$, da cui l'assurdo dal momento che $P_0 > 0$.

Tutto questo ci porta a dire che

$$\text{se } x \in U, \text{ allora } |\nabla u_\infty(x)| > 0. \tag{75}$$

Inoltre, da $u_\infty \in C^1(\mathbb{R}^n)$, segue che

$$U \text{ è chiuso in } \Omega_\infty. \tag{76}$$

Proviamo anche che

$$U \text{ è aperto.} \tag{77}$$

Per dimostrarlo, prendiamo $x \in U$ e da (75) si deduce che

$$\inf_{B_{r_x}(x)} |\nabla u_\infty| > 0$$

per qualche r_x piccolo e positivo. Questo, insieme a (51) e al Principio del massimo forte (rimandiamo a [GT83]), implicano che $P_0(y, u_\infty) = P_0$ per ogni $y \in B_{r_x}(x)$. E questo prova che U è aperto.

Il fatto che Ω_∞ sia un epigrafico (quindi connesso), e da (74), (76), e (77), ci fa concludere che

$$U = \Omega_\infty. \tag{78}$$

Ora ricordando (71), possiamo prendere $x_j \in \Omega_\infty$ tale che

$$\lim_{j \to +\infty} |\nabla u_\infty(x_j)| = 0. \tag{79}$$

Allora

$$\begin{gathered} P_0 = P(\nabla u_\infty, x_j) = \\ = 2\Phi'(|\nabla u_\infty(x_j)|^2)|\nabla u_\infty(x_j)|^2 - \Phi(|\nabla u_\infty(x_j)|^2) - 2G(u_\infty(x_j)) \leq \\ \leq 2\Phi'(|\nabla u_\infty(x_j)|^2)|\nabla u_\infty(x_j)|^2 \end{gathered}$$

per ogni $j \in \mathbb{N}$. Allora, dalle Assunzioni (A) e (B), e passando al limite, si ottiene che $P_0 \leq 0$ il che è in contraddizione con quanto assunto in (58). Questo prova (73).

Ricordando che $P_0 = P(u_\infty, 0) > 0$, segue che

$$0 \in \partial\Omega_\infty \tag{80}$$

e che

$$P(u_\infty, 0) = P_0 > P(u_\infty, x) \text{ per ogni } x \in \Omega_\infty. \tag{81}$$

Osserviamo ora che

$$\partial_\nu u_\infty(0) > 0. \tag{82}$$

Infatti, se così non fosse, ricordando (70), si avrebbe che $\partial_\nu u_\infty(0) = 0$ e quindi $\nabla u_\infty(0) = 0$, che insieme a (69), ci da $G(u_\infty(0)) < 0$, in contrasto con quanto detto in (48). Quindi $\partial_\nu u_\infty(0) > 0$.

Come conseguenza di (51), (82), (81) e del Principio di Hopf (rimandiamo al Teorema 5.5.1 di [PS07]) segue che

$$\partial_\nu P(u_\infty, 0) < 0. \tag{83}$$

Dalla definizione di P, segue che

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\partial_\nu P(u_\infty, x) = 2\Phi''(|\nabla u_\infty(x)|^2)|\nabla u_\infty(x)|^2 \nabla u_\infty(x) \cdot \nabla(\partial_\nu u_\infty(x)) +\\ +2\Phi'(|\nabla u_\infty(x)|^2)\nabla u_\infty(x) \cdot \nabla(\partial_\nu u_\infty(x)) -\\ -\Phi'(|\nabla u_\infty(x)|^2)\nabla u_\infty(x) \cdot \nabla(\partial_\nu u_\infty(x)) -\\ -G'(u_\infty(x))\partial_\nu u_\infty(x)\end{aligned} \tag{84}$$

per ogni $x \in \Omega_\infty$.

Sapendo che

$$\nabla u_\infty = (\partial_\nu u_\infty)\nu$$

e da (84) possiamo scrivere che

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\partial_\nu P(u_\infty, 0) = 2\Phi''(|\nabla u_\infty(0)|^2)|(\partial_\nu u_\infty(0))\nu|^2(\partial_\nu u_\infty(0))\nu \cdot \nabla(\partial_\nu u_\infty(0)) +\\ +\Phi'(|\nabla u_\infty(0)|^2)(\partial_\nu u_\infty(0))\nu \cdot \nabla(\partial_\nu u_\infty(0)) - G'(u_\infty(0))\partial_\nu u_\infty(0) =\end{aligned} \tag{85}$$

(per facilitare la lettura, sottointendiamo l'argomento di Φ, Φ' e Φ'', che è $|\nabla u(0)|^2$)

$$= 2(\partial_\nu u_\infty)^3 \Phi'' \partial^2_{\nu\nu} u_\infty + \Phi' \partial_\nu u_\infty \partial^2_{\nu\nu} u_\infty - G'(u_\infty)\partial_\nu u_\infty =$$

$$= \partial_\nu u_\infty[\partial^2_{\nu\nu} u_\infty(2\Phi''(\partial_\nu u_\infty)^2 + \Phi') - G'(u_\infty)].$$

A questo punto, prendiamo le coordinate normali per $\partial\Omega_\infty$ in 0, cioè definiamo su $\mathbb{R}^n$ delle cordinate $(X_1, \ldots, X_n)$ in modo tale che l'ultima coordinata sia parallela a ν, così da scrivere, vicino a 0, $\partial\Omega_\infty$ come il grafico di una funzione liscia θ nella direzione di ν.

Quindi, stiamo dicendo che, per qualche $\epsilon_0 > 0$,

$$\Omega_\infty \cap B_{\epsilon_0}(0) = \{(X', X_n) \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } X_n > \theta(X')\},$$

con $\theta(0) = 0$ e

$$\partial_i \theta(0) = 0 \text{ per ogni } i = 1, \ldots, n-1. \tag{86}$$

Con un piccolo abuso di notazione, scriveremo $u_\infty(X)$ quando lavoreremo con questo nuovo sistema di coordinate. A questo punto, da (68),

$$u_\infty(X', \theta(X')) = 0$$

quando X' è vicino a 0, inoltre, per ogni $i = 1, \dots, n-1$,

$$\partial_i u_\infty(X', \theta(X')) + \partial_n u_\infty(X', \theta(X'))\theta_i(X') = 0.$$

Quindi, notando che u è C^2 vicino 0, grazie alla (82), (14) e alla regolarità ellittica (rimandiamo a [GT83]), differenziando ancora una volta, abbiamo

$$\partial^2_{ii} u_\infty(X', \theta(X')) + 2\partial^2_{in} u_\infty(X', \theta(X'))\theta_i(X') + \partial^2_{nn} u_\infty(X', \theta(X'))\theta_i^2(X') +$$

$$+ \partial_n u_\infty(X', \theta(X'))\theta_{ii}(X') = 0$$

per ogni $i = 1, \dots, n-1$, quando X' è vicino a 0.

Allora, da (86),

$$\partial^2_{ii} u_\infty(0) + \partial_n u_\infty(0)\theta_{ii}(0) = 0,$$

per ogni $i = 1, \dots, n-1$. Sommando ora da $i = 1, \dots, n-1$, si ha:

$$\Delta u_\infty(0) - \partial^2_{\nu\nu} u_\infty(0) + \partial_n u_\infty(0)\Delta\theta(0) = 0. \tag{87}$$

Notiamo da (86), che la curvatura media di $\partial\Omega_\infty$ in 0 è esattamente $\Delta\theta$ (o comunque proporzionale ad essa). Questo ci porta a dire, grazie a (53), che

$$\Delta\theta \geq 0. \tag{88}$$

Perciò, grazie alla (87) e (88) si ha:

$$\Delta u_\infty(0) \leq \partial^2_{\nu\nu} u_\infty(0). \tag{89}$$

Inoltre, con un calcolo diretto, si arriva a vedere che

$$G'(u_\infty) = \operatorname{div}(\Phi'(|\nabla u_\infty|^2)\nabla u_\infty) =$$

$$= \Delta u_\infty \Phi'(|\nabla u_\infty|^2) + 2\Phi''(|\nabla u_\infty|^2)\sum_{ij} \frac{\partial u_\infty}{\partial x_i}\frac{\partial u_\infty}{\partial x_j}\frac{\partial^2 u_\infty}{\partial x_i \partial x_j}.$$

A questo punto osserviamo ancora che, indicando con $H(u)$ la matrice hessiana di u, si ha:

$$(H(u)\nabla u)\nabla u = (H(u)(\partial_\nu u_\infty)\nu)(\partial_\nu u_\infty)\nu = (\partial_\nu u_\infty)^2 \partial^2_{\nu\nu} u_\infty.$$

E finalmente si arriva a dire che, grazie a (89),

$$G'(u_\infty(0)) = \Delta u_\infty(0)\Phi'(|\nabla u_\infty(0)|^2) +$$

$$+ 2\Phi''(|\nabla u_\infty(0)|^2)\sum_{ij} \frac{\partial u_\infty}{\partial x_i}(0)\frac{\partial u_\infty}{\partial x_j}(0)\frac{\partial^2 u_\infty}{\partial x_i \partial x_j}(0) \leq$$

$$\leq \partial^2_{\nu\nu} u_\infty(0)\Big[2\Phi''(|\nabla u_\infty(0)|^2)(\partial_\nu u_\infty(0))^2 + \Phi'(|\nabla u_\infty(0)|^2)\Big].$$

Da ciò, grazie alla (82) e (85), si vede che $\partial_\nu P(u_\infty, 0) \geq 0$.

Ma questo è in contraddizione con (83), e così la dimostrazione di (57) è finita e con questa, quella del Teorema (1.1), nel caso in cui Ω è un epigrafico.

Se Ω non fosse un epigrafico, ma un dominio limitato come in (I), si procede nello stesso modo con le seguenti modifiche:

- La definizione in (54) è sostituita da

$$\begin{aligned}\mathcal{F} = \{v \in C^1(\overline{\mathcal{U}}) \text{ soluzione debole di } \operatorname{div}(\Phi'(|\nabla v|^2)\nabla v) = G'(v) \\ \text{in } \mathcal{U} \text{ con } 0 \leq v \leq \|u\|_{L^\infty(\mathcal{U})}, \|\nabla v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}, \\ v = 0 \text{ su } \partial\mathcal{U} \text{ e } \mathcal{U} \in \mathcal{D}\},\end{aligned} \tag{90}$$

con $\mathcal{D}$ la famiglia di tutte le traslazioni di Ω:

$$\mathcal{D} = \{p + \Omega, \text{ con } p \in \mathbb{R}^n\}.$$

- Gl'insiemi Ω_{u_k} ora appartengono a $\mathcal{D}$, e così sono della forma $p_k + \Omega$; allora la (64) viene sostituita da

$$p_k \text{ é limitata.}$$

□

2.3 Dimostrazione del Teorema 1.2

Possiamo raggiungere interessanti risultati se vale la condizione appena dimostrata, cioè se soluzioni di (12) verificano (20). In questo caso, sotto opportune ipotesi su F nei suoi punti critici, riusciamo a dare un'ottima stima di c_u, e in alcuni casi anche a trovarne il valore.

Per questa dimostrazione, ci siamo ispirati al lavoro di [FV09], adattando delle tecniche di [Mod85, CGS94].

Dimostrazione: Prima di tutto, proviamo che

$$\begin{aligned}&\text{se esiste un } h \in \overline{\Omega} \text{ tale che } F(u(h)) = c_u \text{ e } F'(u(h)) = 0,\\ &\text{allora } u \text{ è costante.}\end{aligned} \tag{91}$$

Per provarlo, definiamo $r = u(h)$, e fissiamo un $q \in \overline{\Omega}$. Dalla connessione, possiamo prendere $T > 0$ e una curva liscia $\gamma : [0, T] \to \overline{\Omega}$, parametrizzata per lunghezza d'arco, tale che $\gamma(0) = h$ e $\gamma(T) = q$.

Per ogni $t \in [0, T]$, definiamo

$$\varphi(t) = u(\gamma(t)) - r.$$

Segue quindi, che

$$|\varphi'(t)| = |\nabla u(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)|. \tag{92}$$

A questo punto, definiamo la funzione

$$\psi(s) = 2s\Phi'(s) - \Phi(s), \ \ s \geq 0, \tag{93}$$

e, se vale l'Assunzione A, consideriamo

$$E(s) = \psi(s) - \epsilon s^{\frac{p}{2}}, \tag{94}$$

con $0 < \epsilon < \frac{2}{p}c_1$, dove $p > 1$ e $c_1 > 0$ sono le stesse di (20).

Se vale l'Assunzione B, consideriamo la funzione

$$E(s) = \psi(s) - \epsilon s, \tag{95}$$

con $0 < \epsilon < \frac{c_1}{1+\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}}$, dove $c_1 > 0$ è la stessa dell'Assunzione B.

Nel caso in cui valga l'Assunzione A, da (93) si ha che $E'(0) = 0$ e

$$E'(s) = \psi'(s) - \frac{p}{2}\epsilon s^{\frac{p}{2}-1} = \Lambda(s) - \frac{p}{2}\epsilon s^{\frac{p}{2}-1},$$

dove Λ è definita in (33). Da (14), $\Lambda(s) \geq c_1 s^{\frac{p}{2}-1} > \frac{p}{2}\epsilon s^{\frac{p}{2}-1}$, in virtù della scelta di ϵ.

Procedendo analogamente per l'Assunzione B, si osserva che

$$\Lambda(s) \geq \frac{c_1}{1+\sqrt{s}} \geq \epsilon \tag{96}$$

se $s \in \big(0, \|\nabla u\|^2_{L^\infty(\Omega)}\big)$. Concludiamo, per entrambi i casi, che $E(s) \geq 0$ per $s \geq 0$, e quindi

$$E\big(|\nabla u(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)|^2\big) \geq 0. \tag{97}$$

Osserviamo che, se vale l'Assunzione A, usando (20) e (97), otteniamo

$$\begin{aligned} |\nabla u(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)|^p &\leq \frac{1}{\epsilon}\psi(|\nabla u(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)|^2) \leq \\ &\leq \frac{1}{\epsilon}\Big[2\Phi'(|\nabla u(\gamma(t))|^2)|\nabla u(\gamma(t))|^2 - \Phi(|\nabla u(\gamma(t))|^2)\Big] \leq \\ &\leq \frac{2}{\epsilon}\left[c_u - F(u(\gamma(t)))\right]. \end{aligned} \tag{98}$$

Analogamente per l'Assunzione B, usando (96), otteniamo che

$$\psi'(s) = \Lambda(s) \geq \epsilon$$

e quindi

$$\psi(s) \geq \epsilon s$$

per ogni $s \in \big[0, \|\nabla u\|^2_{L^\infty(\Omega)}\big)$.

Di conseguenza, ricordando (97), si ha

$$|\nabla u(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)|^2 \leq \frac{2}{\epsilon}\left[c_u - F(u(\gamma(t)))\right]. \tag{99}$$

A questo punto, definiamo

$$p_* := \begin{cases} p & \text{se vale l'Assunzione A,} \\ 2 & \text{se vale l'Assunzione B,} \end{cases}$$

e scriviamo (98) e (99) come

$$|\nabla u(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)|^{p_*} \leq \frac{2}{\epsilon}\left[c_u - F(u(\gamma(t)))\right]. \tag{100}$$

Ora definiamo

$$q := \begin{cases} p-1 & \text{se vale l'Assunzione A con } p > 2, \\ \\ 1 & \begin{array}{c}\text{se vale l'Assunzione A con } p \leq 2, \\ \text{o vale l'Assunzione B.}\end{array} \end{cases}$$

Prendendo τ sul segmento tra $r = u(\gamma(0))$ e $u(\gamma(t))$, la continuità di u implica che esiste $x_\tau \in \overline{\Omega}$ tale che $\tau = u(x_\tau)$. Così, dalla regolarità di F o da (22), si ottiene che

$$\begin{aligned} |F'(\tau) - F'(r)| = |F'(u(x_\tau)) - F'(u(h))| \leq \\ \leq |u(x_\tau) - u(h)|^q = |\tau - r|^q. \end{aligned} \tag{101}$$

Da (100), (92) and (101), possiamo concludere che

$$\begin{aligned} |\varphi'(t)|^{p_*} = |\nabla u(\gamma(t))\gamma'(t)|^{p_*} \leq \frac{2}{\epsilon}\left[c_u - F(u(\gamma(t)))\right] = \frac{2}{\epsilon}\left[F(r) - F(u(\gamma(t)))\right] = \\ = -\frac{2}{\epsilon}\int_r^{u(\gamma(t))} F'(\tau)d\tau = -\frac{2}{\epsilon}\int_r^{u(\gamma(t))} (F'(\tau) - F'(r))d\tau \leq \\ \leq \frac{2}{\epsilon}\|F\|_{C^{1,1}(0,\|u\|_{L^\infty(\Omega)})}|u(\gamma(t)) - r|^{q+1} = C^2|\varphi(t)|^{q+1}, \end{aligned}$$

dove $C = \sqrt{\frac{2}{\epsilon}\|F\|_{C^{1,1}(0,\|u\|_{L^\infty(\Omega)})}}$. Allora, si ha che

$$|\varphi'(t)|^{p_*} \leq C^2|\varphi(t)|^{q+1},$$

da cui, distinguendo i vari casi possibili per p_* e q, e ricordando che φ è limitata, otteniamo che

$$|\varphi'(t)| \leq C|\varphi(t)|,$$

dove $C > 0$ è un'opportuna costante.

Come conseguenza, abbiamo che la funzione $t \in [0, T] \to (\varphi(t))^2 e^{-2Ct}$ è decrescente, perciò

$$(u(q) - r)^2 e^{-2CT} = (\varphi(T))^2 e^{-2CT} \leq (\varphi(0))^2 = (u(h) - r)^2 = 0.$$

Questo mostra che $u(q) = r$, provando la (91).

Ora proviamo la (23). Assumiamo, senza perdita di generalità, che u non è costante e procediamo per assurdo.

Se (23) fosse falsa, otterremo dalla definizione di c_u che

$$c_u = \max_{r \in [0, \|u\|_{L^\infty(\Omega)}]} F(r) = F(r_0), \tag{102}$$

con

$$r_0 \in (0, \|u\|_{L^\infty(\Omega)}). \tag{103}$$

Questo ci dice che r_0 è un massimo interno per F, e quindi

$$F'(r_0) = 0. \tag{104}$$

Ora, da (12) e dalla continuità di u, possiamo prendere $h \in \overline{\Omega}$ tale che $u(h) = r_0$. Allora, da (102) e da (103) vediamo che $F(u(h)) = c_u$ e $F'(u(h)) = 0$. Di conseguenza, (91) ci dice che u è costante, da cui l'assurdo.

Questo dimostra (23).

Ora supponiamo che (25) è verificata. Allora, possiamo affermare che

$$\text{se } c_u = F(0), \text{ allora } u \text{ si annulla identicamente in } \Omega. \tag{105}$$

Per provarlo, supponiamo che

$$c_u = \max_{r \in [0, \|u\|_{L^\infty(\Omega)}]} F(r) = F(0).$$

Allora 0 è un massimo al bordo per F e così $F'(0) \leq 0$.

Questo e (25) ci dicono che $F'(0) = 0$ e, da $\partial\Omega \neq \varnothing$, sappiamo che esiste $h \in \partial\Omega$ tale che $u(h) = 0$.

Allora, $F(u(h)) = F(0) = c_u$ e $F'(u(h)) = F'(0) = 0$, così (91) ci dice che u è costante e così si annulla identicamente. Questo prova la (105).

Quindi, (23) e (105) implicano (25) e così la dimostrazione del Teorema 1.2 è completa. □

2.4 Dimostrazione del Teorema 1.3

Arriviamo ora ad un altro risultato che riguarda le soluzioni di (12) che soddisfano l'uguaglianza in (20).

Se l'uguaglianza è verificata in punti non degeneri, allora la soluzione u è unidimensionale.

Dimostrazione: Supponiamo che valga l'uguaglianza in (20) per un punto $p \in \Omega \cap \{\nabla u \neq 0\}$, e sia C la componente connessa aperta di $\{\nabla u \neq 0\}$ contenente p.

Per prima cosa proviamo che

$$\text{l'uguaglianza in (20) vale per tutto } C. \tag{106}$$

Per vederlo, osserviamo che $P(u, x)$ ha massimo interno in $x = p$, grazie a (57). Così, dal Principio del massimo forte, $P(u, x)$ si annulla in C, e (106) è verificata.

Ora, dalla definizione di C, si osserva che

$$\nabla u(x) = 0 \text{ per ogni } x \in \partial C \cap \Omega. \tag{107}$$

Quindi, da (106),

$$F(u(x)) = c_u \text{ per ogni } x \in \partial C \cap \Omega. \tag{108}$$

Osservando che $\partial C \subseteq \partial\Omega \cup \Omega$, otteniamo da (23) e (108) che

$$\begin{gathered} \text{se } \beta \text{ è una componente connessa di } \partial C, \text{ allora} \\ u \text{ è costantemente uguale a } 0 \text{ o a } \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \text{ in } \beta. \end{gathered} \tag{109}$$

Ora osserviamo che la funzione

$$V(|\nabla u|^2) = 2\Phi'(|\nabla u|^2)|\nabla u|^2 - \Phi(|\nabla u|^2) \tag{110}$$

è monotona. Infatti, da (33), derivando si ottiene la funzione $\Lambda(s)$ che, da (14), è strettamente positiva per $s > 0$. Perciò la funzione (110) è invertibile (chiameremo la sua inversa V^{-1}). Questo ci porta a dire che (12) e (106) implicano

$$\begin{gathered} \operatorname{div}(\Phi'(|\nabla u|^2)\nabla u) + F'(u) = 0 \\ \text{e } |\nabla u| = g(u) \text{ in } C \subseteq \{\nabla u \neq 0\}, \end{gathered}$$

dove $g(r) = \sqrt{V^{-1}(2(c_u - F(r)))}$.

Osserviamo che, da (23), $g \in C^1((0, \|u\|_{L^\infty(\Omega)}))$.

Tutto questo ci dice che gli insiemi di livello di u in C sono una famiglia di ipersuperfici isoparametriche (rimandiamo a [Ka99] e a pagina 353 di [FK08]), quindi questi insiemi di livello in C hanno simmetria planare, sferica o cilindrica e, a meno di cambi di variabili, è verificato solo uno dei seguenti casi:

(C1). esiste $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $u(x) = u_0(x_n)$ per ogni $x = (x', x_n) \in C \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$,

(C2). esiste $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $u(x) = u_0(|x|)$ per ogni $x \in C$,

(C3). esiste $m \in \mathbb{N}$, $1 \le m \le n$, e $u_0 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-m}$ tale che $u(x) = u_0(|x'|)$ per ogni $x = (x', x'') \in C \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$.

Infatti, il caso $m = 1$ in (C3) si riduce a (C1), perciò possiamo assumere senza perdita di generalità che

$$m \geq 2 \text{ in (C3)}. \tag{111}$$

Allora affermiamo che

$$\text{il caso (C3) non si verifica mai.} \tag{112}$$

Dimostriamo (112) per assurdo. Supponiamo che vale (C3). Allora, da (106), si ha che

$$\Phi'(|u_0'(|x'|)|^2)|u_0'(|x'|)|^2 - \frac{1}{2}\Phi(|u_0'(|x'|)|^2) - c_u + F(u_0(|x'|)) = 0 \tag{113}$$

per ogni $x = (x', x'') \in C$. Considerando che $p \in C$ e C è aperto, possiamo prendere $p_0 = (p_0', p_0'') \in C$ con $p_0' \neq 0$ e valutiamo (113) in $x = p_0 + tp_0/|p_0|$.

Concludiamo che:

$$\begin{aligned} 0 = \Phi'(|u_0'(|p_0'| + t)|^2)|u_0'(|p_0'| + t)|^2 - \\ -\frac{1}{2}\Phi(|u_0'(|p_0'| + t)|^2) - c_u + F(u_0(|p_0'| + t)) \end{aligned}$$

per ogni t sufficientemente vicino a 0. Quindi, differenziando in t la formula di sopra, si avrà

$$\begin{aligned} u_0'(|p_0'| + t)\big[2\Phi''(|u_0'(|p_0'| + t)|^2)|u_0'(|p_0'| + t)|^2 u_0''(|p_0'| + t) + \\ +\Phi'(|u_0'(|p_0'| + t)|^2)u_0''(|p_0'| + t) + F'(u_0(|p_0'| + t))\big] = 0. \end{aligned} \tag{114}$$

Osserviamo ora che

$$\Delta u(x) = u_0''(|x'|) + u_0'(|x'|)\frac{m-1}{|x'|}. \tag{115}$$

Inoltre, scriviamo

$$\mathrm{div}(\Phi'(|\nabla u|^2)\nabla u) = \Phi'(|\nabla u|^2)\Delta u + 2\Phi''(|\nabla u|^2)\sum_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}. \tag{116}$$

e calcoliamo, usando che $u(x) = u_0(|x|)$,

$$\begin{aligned} \sum_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = u_0'(|x'|)^2 u_0''(|x'|)\sum_{ik}\frac{(x_i')^2(x_k')^2}{|x'|^4} + \\ +\frac{u_0'(|x'|)^3}{|x'|^2}\sum_{ik}x_i'x_k'\frac{\delta_{ik}|x'|^2 - x_i'x_k'}{|x'|^3} = \\ = u_0'(|x'|)^2 u_0''(|x'|) + \frac{u_0'(|x'|)^3}{|x'|^5}\sum_{ik}x_i'x_k'[\delta_{ik}|x'|^2 - x_i'x_k'] = \\ = u_0'(|x'|)^2 u_0''(|x'|) + u_0'(|x'|)^3\frac{1}{|x'|} - u_0'(|x'|)^3\frac{1}{|x'|} = \\ = u_0'(|x'|)^2 u_0''(|x'|). \end{aligned} \tag{117}$$

A questo punto da (12)

$$F'(u_0(|p_0'| + t)) = -\mathrm{div}(\Phi'(|u_0'(|p_0'| + t)|^2)u_0'(|p_0'| + t)), \tag{118}$$

sostituendo la (118) in (114), e usando (116) e (117), segue

$$\begin{aligned}0 = u_0'(|p_0'|+t)\big[2\Phi''(|u_0'(|p_0'|+t)|^2)|u_0'(|p_0'|+t)|^2 u_0''(|p_0'|+t)+\\ +\Phi'(|u_0'(|p_0'|+t)|^2)u_0''(|p_0'|+t)-\\ -\mathrm{div}(\Phi'(|u_0'(|p_0'|+t)|^2)u_0'(|p_0'|+t))\big] =\\ = -\Phi'(|u_0'(|p_0'|+t)|^2)u_0'(|p_0'|+t)^2\frac{m-1}{|p_0'|+t}.\end{aligned} \tag{119}$$

Questa quantità è strettamente negativa da (111) e da (14) (visto che $\Phi' \neq 0$ perchè $\nabla u \neq 0$), allora la (112) è provata.

Con argomenti analoghi (basta sostituire x al posto di x' e n al posto di m) si vede che

$$\text{il caso (C2) non è verificato.} \tag{120}$$

Così, grazie a (112) e (120), sappiamo che vale il caso (C1) e possiamo scrivere

$$u(x) = u_0(x_n) \text{ per ogni } x \in C. \tag{121}$$

Questo prova la prima affermazione del Teorema 1.3.

Per la seconda affermazione, per prima cosa osserviamo che u è limitata e deduciamo da (28) e dalla Teoria della regolarità ellittica (rimandiamo a [LU68]) che

$$u \in C^2(\Omega). \tag{122}$$

In particolare, possiamo scrivere l'equazione in (12) non in forma di divergenza e applicare il Principio della continuazione unica (rimandiamo al Teorema 1.8 in [Kaz88] per esempio): quindi, da (121), abbiamo che $u(x) = u_0(x_n)$ per ogni $x \in \Omega$, e ciò completa la dimostrazione del Teorema 1.3. □

2.5 Dimostrazione del Teorema 1.4

A questo punto risolviamo il problema inverso. Ovvero, a partire dalla soluzione u, si può arrivare a dire che l'insieme Ω è un semispazio oppure una striscia.

Per verificarlo, basterà provare che gli zeri della funzione u sono isolati.

Dimostrazione: Dal Teorema 1.3, sappiamo che $u(x)$ ha simmetria unidimensionale, per cui, a meno di rotazioni, scriveremo $u(x) = u_0(x_n)$, con $u_0 : J \to \mathbb{R}$, dove

$$J := \{r \in \mathbb{R} \text{ t.c. esista } z \in \mathbb{R}^{n-1} \text{ t.c. } (z,r) \in \Omega\}.$$

Essendo $u = 0$ su $\partial\Omega$, possiamo prendere $t_* \in \overline{J}$ tale che

$$u_0(t_*) = 0. \tag{123}$$

Dimostriamo ora che

$$\text{gli zeri di } u_0 \text{ in } J \text{ sono isolati.} \tag{124}$$

Osserviamo che la tesi del Teorema 1.4 è banalmente implicata da (123), (124), e dalla simmetria unidimensionale di u, per cui ci concentreremo ora a dimostrare (124).

Ipotiziamo per assurdo che (124) non sia vera: esisterà allora una successione di $\{\zeta_j\}_j$ tendente a 0, tale che $u_0(t_0+\zeta_j)=0=u_0(t_0)$.

Da (12), sappiamo che

$$-F'(0)=2\Phi''(|u_0'|^2)(u_0')^2(u_0)''(t_0)+\Phi'(|u_0'|^2)u_0''(t_0). \tag{125}$$

Inoltre, ricordiamo che $u\in C^2(\Omega)$, da (122). Perciò, dalla continuità delle prime due derivate di u, si avrà

$$u_0'(t_0)=\lim_{j\to\infty}\frac{u_0(t_0+\zeta_j)-u_0(t_0)}{\zeta_j}=0,$$

e

$$u''(t_0)=\lim_{j\to\infty}\frac{u'(t_0+\zeta_j)-u'(t_0)}{\zeta_j}=0.$$

Sostituendo in (125) si ha $F'(0)=0$, e allora dalla (26) segue che u è identicamente nulla, il che è assurdo, perchè $p\in\{\nabla u\neq 0\}$ e quindi $\{\nabla u\neq 0\}\neq\varnothing$.

Questo dimostra (124) e completa quindi la dimostrazione del Teorema 1.4.

□

Riferimenti bibliografici

[AAC01] Giovanni Alberti, Luigi Ambrosio, e Xavier Cabré, *On a long-standing conjecture of E. De Giorgi: symmetry in 3D for general nonlinearities and a local minimality property.* Acta Appl. Math., 65(1-3):9-33, 2001. Special issue dedicated to Antonio Avantaggiati on the occasion of his 70th birthday.

[AC00] Ambrosio Luigi e Cabré Xavier, *Entire solutions of semilinear elliptic equations in* $\boldsymbol{R}^3$ *and a conjecture of De Giorgi*, J.Amer.Math.Soc. 13(2000), no.4, 725-739

[AC79] Allen S. e Cahn J., *A microscopic theory for antiphase boundary motion and its application to antiphase domain coasering*, Acta Metallurgica, 27:1084-1095, 1979

[AC81] Alt H.W. e Caffarelli L.A., *Existence and regularity for a minimum problem with free boundary*, J.Reine Angew. Math., 325:105-144, 1981

[Ant73] S. S. Antman, *Nonuniqueness of equilibrium states for bars in tension,* J. Math. Anal. Appl., 44 (1973), pp. 333-349.

[BCN97] Henri Berestycki, Luis Caffarelli Luis, Louis Nirenberg, *Further qualitative properties for elliptic equations in unbounded domains*, Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa Cl. Sci. (4),25(1-2):69-94 (1998), 1997, dedicated to Ennio De Giorgi.

[CaG95] Gilles Carbou, *Unicité et minimalité des solutions d'une équation de Ginzburg-Landau*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 12(3):305-318, 1995.

[CGS94] Luis Caffarelli, Nicola Garofalo, Fausto Segala, *A gradient bound for entire solutions of quasi-linear equations and its conseguences*, Comm. Pure Appl. Math., 47(11):1457-1473, 1994.

[DB83] Emmanuele DiBenedetto, $C^{1+\alpha}$ *local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations,* Nonlinear Anal. 7:827–850, 1983.

[DB91] Emmanuele DiBenedetto, *Degerate Parabolic Equation,* Springer-Verlag, 1991.

[DG57] Ennio De Giorgi, *Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari,* Mem. Acc. Sci. Torino, Cl. SC. Fis. Mat. Nat. (3) 3:25-43, 1957.

[DG79] Ennio De Giorgi, *Convergence problems for functionals and operators,* In *Proceeding of the International Meeting on Recent Methods in Nonlinear Analysis (Rome 1978),* 131-188, Bologna 1979, Pitagora.

[DPKW08] Manuel del Pino, Mike Kowalczyk e Juncheng Wei, *On De Giorgi Conjecture in Dimension* $N \geq 9$, preprint, 2008.

[FK08] A. Farina e B. Kawohl, *Remarks on an overdetermined boundary value problem.* Calc. Var. Partial Differential Equations, 31(3):351-357, 2008.

[FV] Alberto Farina, Enrico Valdinoci, *1D symmetry for solutions of semilinear and quasilinear elliptic equations,* Trans. American Math. Soc.

[FV09] Alberto Farina, Enrico Valdinoci, *A pointwise gradient estimate in possibly unbounded domains with nonnegative mean curvature*, preprint, 2009.

[FSV08] Alberto Farina, Bernardino Sciunzi, ed Enrico Valdinoci, *Bernstein and De Giorgi type problems: new results via a geometric approach.* Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5), 7(4):741-791, 2008.

[GG98] Nassif Ghoussoub, Changfeng Gui, *On a conjecture of De Giorgi and some related problems*, Math. Ann. 311(3):481-491, 1998.

[Giu86] Enrico Giusti, *Minimal surfaces and functions of bounded variation*, Monographs in Mathematics, 80. Birkhäuser Verlag, Basel, pp. 240+xii, 1984.

[GP58] Vitaliĭ L. Ginzburg, Lev Pitaevskiĭ, *On the theory of superfluidity*, Soviet Phisics JEPT, 34 (7):858-861, 1958.

[GT83] David Gilbarg, Neil S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, volume 224 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences].* Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1983.

[Ka99] B. Kawohl, *Symmetrization - or how to prove symmetry of solutions to partial differential equations.* In: Jäger, W., Nečas, J., John, O., Najzar, K., Stara, J. (eds.) Partial Differential Equations, Theory and Numerical Solution. Chapman and Hall CRC Research Notes in Math. 406 London, pp. 214-229 (1999)

[La67] Lev D. Landau, *Collected papers of L.D.Landau*, Edited and with an introduction by D.ter Haar, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1967

[Lie86] Gary M. Lieberman, *Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations,* Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, volume 12, No. 11, pp. 1203-1219, 1988.

[LU68] Olga A. Ladyzhenskaya, Nina N. Ural'tseva, *Linear and quasilinear elliptic equations*, translated from the Russian by Scripta Technica, Academic Press, New York-London, 1968.

[LV07] Rafael de la Llave, Enrico Valdinoci, *Ground states and critical points for generalized Frankel-Kontorova models in* $\mathbb{Z}^d$, Nonlinearity 20(10):2409–2424, 2007.

[Mod85] Luciano Modica, *A gradient bound and a Liouville theorem for nonlinear Poisson equations*, Comm. Pure Appl. Math. 38:679–684, 1985.

[Mod89] Luciano Modica, *Monoticity of the energy for entire solutions of semilinear elliptic equations*, Partial differential equations and calculus of variations, Vol. II., Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.2, 843–850, Birkhäuser, Boston, 1989.

[Pay76] Lawrence E. Payne, *Some remarks on maximum principles*, J. Analyse Math. 30:421–433, 1976.

[PS07] Patrizia Pucci and James Serrin, *The maximum principle,* Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 73. Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.

[Ro79] Rowlinson J.S., *Translation of J. D. van der Waals' "The thermodynamic theory of capillarity under the hypothesis of a continuous variation of density"*, J. Statist. Phys., 20(2)197-244, 1979.

[Sa03] Vasile Ovidiu Savin, *Phase transitions: regularity of flat level sets*, PhD thesis, University of Texas at Austin, 2003

[Spe81] Renè P. Sperb, *Maximum principles and their applications,* volume 157 of *Mathematics in Science and Engineering.* Academic Press Inc, [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1981.

[Tol83] Peter Tolksdorff, *Everywhere regularity for some quasi-linear systems with lack of ellipticity,* Ann. Mat. Pura Appl. 4(134):241-266 (1983).

[Tol84] Peter Tolksdorff, *Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations,* J. Differential Equations 51:126–150, 1984.

[Tho00] Gudlaugur Thorbergsson, *A survey on isoparametric hypersurfaces and their generalizations.* Handbook of differential geometry, Vol. I, pages 963-995. North-Holland, Amsterdam, 2000.